ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 20 NOVEMBRE 1933.

PRÉSIDENCE DE M. CHARLES RICHET.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. C. MATIGNON, faisant hommage à l'Académie ([1]) d'une Conférence faite à Prague sur l'*Évolution de l'industrie des Fertilisants*, s'exprime en ces termes :

Dans cet exposé, je me suis attaché à déterminer l'importance de l'industrie des engrais (20 milliards de produits annuels contre 50 milliards pour les produits de la grosse métallurgie).

L'Europe consomme les 60 pour 100 de la production ; elle doit nourrir 500 millions d'habitants, alors que les États-Unis avec une superficie sensiblement la même n'ont que 120 millions d'habitants :

	Superficie.	Population (1930).	Product. en blé (1930) (quintaux).
Europe	9.732.000$^{km^2}$	506 millions	550 millions
E. U. A.	9.212.000 »	122 »	220 »
Amérique totale........	38.346.000 »	252 »	400 »

Les 20 milliards d'engrais consommés annuellement apportent un supplément d'environ 100 millions de rations supplémentaires annuelles, chiffre obtenu en tenant compte de la ration journalière d'un individu et du supplément de rendement obtenu dans les diverses cultures par l'emploi des engrais.

Les 60 millions de rations supplémentaires, obtenues par l'agriculture européenne, ne peuvent assurer une alimentation rationnelle supplémen-

---

([1]) Séance du 13 novembre 1933.

taire que pendant une période de 20 ans, étant donné que l'augmentation européenne exige chaque année 3 millions de rations nouvelles pour adultes.

Les réserves naturelles de phosphates, de sels de potassium garantissent pendant des milliers d'années les besoins de l'agriculture en engrais, avec le rythme actuel de la consommation.

M. **Ch. Fabry** fait hommage à l'Académie du deuxième et dernier volume de son *Cours de Physique de l'École Polytechnique*.

M. **H. Deslandres** fait hommage à l'Académie d'un Ouvrage de M. E. M. Antoniadi : *L'Astronomie égyptienne*, dont il a écrit la *Préface*.

M. **Maurice d'Ocagne** fait hommage à l'Académie d'une brochure intitulée Charles-Louis Fremont, 1855-1930. *Sa vie et son œuvre*.

M. **Aug. Lameere** fait hommage à l'Académie du fascicule 3, tome III de son *Précis de Zoologie : Les Crustacés*.

CORRESPONDANCE.

La **Royal Institution**, de Londres, adresse à l'Académie l'expression de ses condoléances à l'occasion du décès de M. *P. Painlevé*.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Edgar Aubert de la Rüe. *Étude géologique et géographique de l'Archipel de Kerguelen*.

2° G. Lecoq. *Le segment capable sphérique*. (Présenté par M. Charles Maurain.)

M. **Victor-Pauchet** prie l'Académie de vouloir bien le compter au nombre des candidats à la place vacante dans la Section de Médecine et Chirurgie par le décès de M. *E. Quénu*.

GÉOMÉTRIE. — *Sur les congruences isothermes.*
Note [1] de M. PAUL DELENS, présentée par M. E. Cartan.

1. Les recherches de M. G. Bouligand sur la théorie du potentiel l'ont conduit au problème suivant : *Rechercher les congruences* (réelles) $u(x, y, z) = \alpha$, $v(x, y, z) = \beta$, *telles qu'il existe des fonctions* $\varphi(u, v)$ *harmoniques en* (x, y, z) *dans un tube de lignes de la congruence, les valeurs de* φ *à la surface de ce tube pouvant être arbitraires sur chaque ligne de la congruence.* Les indications que m'a communiquées M. Bouligand m'ont permis d'obtenir la solution générale, qu'il faudra toutefois discuter dans chaque cas particulier. J'expose ici les résultats de mon étude, qui sera développée dans un autre Recueil.

M. A. Alayrac avait précédemment obtenu une solution [2], fournie par *les congruences rectilignes isotropes de Ribaucour*, ou (IR), dont les familles de développables sont formées de plans isotropes. Pour le problème de Cauchy relatif à l'équation de Laplace $\Delta_2 \Phi = 0$, les surfaces caractéristiques sont les développables isotropes, définies par $\Delta_1 \Theta = 0$; ceci laisse prévoir l'intervention des *congruences isotropes générales* (I) — les congruences de courbes étant désignées par (IC) — que j'ai introduites et étudiées récemment [3].

Je rappelle quelques propriétés des congruences (I) : leurs coniques indicatrices des courbures et torsions normales sont circulaires, d'où l'existence de familles de surfaces isogonales, orthogonales, et de développables isotropes appartenant à la congruence. Les congruences de M. R. Garnier, à directions asymptotiques indéterminées, sont (I). Les congruences (I) normales — ou (I, N) — sont formées des trajectoires orthogonales de ∞^1 sphères ou plans.

2. Une classification sommaire des congruences montre d'abord l'existence de congruences *anisothermes* (h_0) et *mono-isothermes* (h_1), ne possédant aucune famille isotherme de surfaces, ou une seule. Les congruences *di-isothermes* (h_2) possèdent ensuite un faisceau linéaire de familles isothermes. Mais deux familles isothermes de surfaces peuvent en définir

---

(1) Séance du 13 novembre 1933.

(2) A. ALAYRAC, *Comptes rendus*, **191**, 1930, p. 290; **192**, 1931, p. 213.

(3) *Comptes rendus*, **192**, 1931, p. 1632; *Rendic. del circ. mat. di Palermo*, **56**, II et III, 1932, p. 289-352; *Bull. Soc. math. de France*, **61**, I et II, 1933, p. 95-127.

d'autres n'appartenant pas à ce faisceau : ceci arrive, par exemple, pour les congruences *orthoptiques* dont les deux familles de surfaces orthogonales $u=\alpha$, $v=\beta$ sont isothermes; la solution générale a alors la forme $\varphi = luv + mu + nv + k$. Cette solution est d'ailleurs une forme réduite : à partir de deux familles isothermes non orthogonales, la solution générale se présente avec six constantes arbitraires.

(Exemple : la congruence des droites rencontrant orthogonalement une droite fixe).

Laissant ensemble les congruences *poly-isothermes* (h'), où la solution φ dépend de constantes ou de fonctions arbitraires sans atteindre la généralité voulue, nous arrivons aux congruences *méga-isothermes* (H), dernier stade de la classification.

Pour une congruence (H), la solution φ est donnée par une équation du deuxième ordre, du type elliptique, qu'on peut ramener à la forme

$$\varepsilon_2(\varphi) = \varphi_{uu} + \varphi_{vv} + P(u, v)\varphi_u + Q(u, v)\varphi_v = 0.$$

Alors *les rapports mutuels des cinq quantités* $\Delta_1 U$, $\Delta(U, V)$, $\Delta_1 V$, $\Delta_2 U$, $\Delta_2 V$, *relatifs à deux familles arbitraires de surfaces de la congruence, restent constants le long de chaque ligne* (u, v), propriété connue de M. G. Bouligand. On peut caractériser les congruences (H) par les conditions

$$\Delta_1 U = 0, \qquad \Delta_1 V = 0, \qquad \frac{\Delta_2 U}{\Delta(U, V)} = F(U, V), \qquad \frac{\Delta_2 V}{\Delta(U, V)} = G(U, V)$$

(U, V conjuguées complexes; F, G arbitraires conjuguées), d'où aussi :

Toute congruence (H) *est* (I); *toute congruence* (I) *et* (h_2) *est* (H).

3. Les résultats précédents m'ont permis de traiter de nouveaux exemples singuliers du problème *homogène* de M. G. Bouligand [1]. La congruence (IR), donc (H), des *axes focaux d'un cercle* est importante pour la génération des autres congruences (IR); la représentation (u, v), où φ est fonction harmonique en (u, v), est la représentation sphérique ou sa projection stéréographique. On peut passer de là à la représentation tracée par les axes focaux sur le plan du cercle : ceci met en jeu une transformation remarquable de Darboux avec égalité d'angles, euclidiens d'une part, avec métrique cayleyenne d'autre part. On retrouve alors les cas particuliers des congruences de droites, soit concourantes, soit parallèles, étudiés par M. Bouligand.

---

(1) Voir ci-après (p. 1179) la Communication de M. G. Bouligand.

La congruence (IC) des *hélices circulaires de même axe et de même pas* est (H). Ce cas comprend la congruence des droites parallèles et celle des *cercles de même axe*, déjà intervenue dans la théorie du potentiel et objet de remarques importantes de M. Bouligand.

GÉOMÉTRIE. — *Sur la courbure totale des surfaces ouvertes.* Note [1] de M. **S. Cohn-Vossen**, présentée par M. Élie Cartan.

1. *Remarques de topologie.* — Nous considérons ici des surfaces abstraites S sans singularités et sans frontière. La *caractéristique* de S est définie par $\chi(S) = 1 - p^1 + p^2$, où p^r désigne le $r^{\text{ième}}$ nombre de Betti. Si S est fermée, orientable et de genre p, on a $p^2 = 1$, $p^1 = 2p$, et par conséquent $\chi(S) = 2 - 2p$. Si S est ouverte ou non orientable, on a $p^2 = 0$, d'où $\chi(S) = 1 - p^1$. Si S est ouverte, deux cas sont possibles : 1° S est à connexion infinie, $p^1 = \infty$ et $\chi(S) = -\infty$; 2° S est à connexion finie, p^1 et $\chi(S)$ sont finis. Le second cas se présente lorsque S est homéomorphe à une surface fermée S′ privée de q de ses points ; on a alors $\chi(S) = \chi(S') - q$. Ainsi $\chi(S) = 1$, si S est homéomorphe au plan cartésien ; $\chi(S) = 0$, si S est homéomorphe au cylindre circulaire.

2. *Remarques de géométrie infinitésimale.* — Soit S une surface pourvue d'une géométrie riemannienne. On entend par *courbure totale* d'un domaine G de S l'intégrale

$$C(G) = \int\int_G K\, d\sigma,$$

où K désigne la courbure de Gauss et $d\sigma$ l'élément de surface. Si G est infini, il se peut que C(G) soit fini, ou que $C(G) = \pm\infty$, ou enfin que C(G) n'existe pas.

Comme il s'agit dans la suite de propriétés globales, il convient de postuler que la surface S soit complète [2] : chaque ensemble E de S, borné au sens de la métrique de S, doit être aussi compact. Il arrive que les théorèmes suivants soient en défaut, lorsqu'on renonce à ce postulat.

3. L'égalité connue

$$C(S) = 2\pi . \chi(S), \tag{1}$$

(1) Séance du 13 novembre 1933.

(2) *L'espace normal* de E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, 1928, n° 56; la *surface complète* de H. Hopf et W. Rinow, *Comm. Math. Helv.*, 3, 1931, p. 209.

valable pour les surfaces fermées, doit être remplacée par une inégalité pour les surfaces ouvertes :

Théorème I*a*. — *Si* S *est une surface complète ouverte à connexion finie, et si* C(S) *existe, on a*

$$(2)\qquad C(S) \leqq 2\pi.\chi(S);$$

si en particulier S = P *est homéomorphe au plan cartésien, on a donc*

$$(2_0)\qquad C(P) \leqq 2\pi.$$

L'estimation (2) ne peut pas être améliorée. En effet, pour toute surface ouverte S, on vérifie que, quel que soit le nombre c, $-\infty \leqq c \leqq 2\pi.\chi(S)$, on peut définir sur S une géométrie riemannienne complète, telle que $C(S) = c$.

Le théorème I*a* est un cas particulier du suivant :

Théorème I. — *Soient* S *une surface complète ouverte à connexion finie,* M *une portion bornée quelconque de* S, *et* ε *un nombre positif quelconque ; il existe un domaine* G = G(M, ε) *de* S *comprenant* M, *tel que*

$$C(G) < 2\pi.\chi(S) + \varepsilon.$$

Citons comme application le théorème suivant II, où l'on ne fait aucune hypothèse sur le caractère topologique de S; ce théorème est une conséquence connue de (1) si l'on se borne à des surfaces fermées.

Théorème II. — *Si sur toute la surface complète* S *on a* K > 0, S *est homéomorphe à la sphère ou au plan projectif, ou encore au plan cartésien.*

En effet, si S n'appartenait pas à l'un de ces trois types, elle aurait une surface de recouvrement à une infinité de feuillets homéomorphe au plan cartésien P; la métrique S déterminerait sur P une géométrie riemannienne complète avec $C(P) = +\infty$, en contradiction avec (2_0).

Ces théorèmes contribuent à dévoiler les relations entre les propriétés métriques et topologiques des variétés [1].

4. Le théorème I s'obtient en combinant la formule connue de Gauss-Bonnet, qui est une relation entre (G), C(G) et la courbure géodésique de la frontière d'un domaine fini G avec le

Théorème III. — *Soit* H *le domaine extérieur à un cercle* C *du plan cartésien* P. *Supposons* H *pourvu d'une géométrie riemannienne, complète dans ce sens qu'aucune suite de points n'est bornée qui diverge dans* P. *A chaque* ε > 0

[1] Cf. Hopf, *L'enseignement math.*, 30, 1931, p. 223; *Jahresber. d. Deutschen Math. Ver.*, 41, 1932, p. 209.

correspond alors dans H *une ligne polygonale géodésique* L, *homologue à* C, *fermée et sans points doubles, dont la somme des angles intérieurs vérifie l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < n\pi + \varepsilon.$$

Le théorème est encore vrai si l'on n'admet pour L que les trois types spéciaux suivants : les polygones convexes ($0 < \alpha_i < \pi$), les géodésiques fermées ($\alpha_i = \pi$) et les lacets concaves ($\pi < \alpha_1 < \pi + \varepsilon$, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \pi$).

Un exposé complet avec la démonstration du théorème III paraîtra dans un autre Recueil.

GÉOMÉTRIE. — *Sur la déformation des sous-espaces dans un espace à connexion linéaire générale.* Note de M. **Paul Dienes**, présentée par M. Élie Cartan.

1. Dans cette Note, nous allons étendre les résultats obtenus ([1]) pour les espaces à connexion linéaire générale aux sous-espaces X_m d'un espace pareil donnés dans une forme paramétrique

$$(1) \qquad x^\alpha = f^\alpha(u^1, \ldots, u^m) \equiv f^\alpha(u^k) \equiv f^\alpha(u),$$

où nous convenons de varier les premières lettres des alphabets latins et grecs de 1 à n, les lettres au milieu $i, j, k, \ldots; \iota, \varkappa, \lambda, \ldots$ de 1 à m, et les lettres $p, q, r, \ldots; \pi, \rho, \sigma, \ldots$ de $m+1$ à n. Nous supposerons aussi que la géométrie A_m sur X_m est déterminée par projection, c'est-à-dire par les paramètres métriques

$$b_{\lambda\mu} = a_{\alpha\beta} B^\alpha_\lambda B^\beta_\mu, \qquad B^\alpha_\lambda = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^\lambda},$$

et par les paramètres de connexion

$$(2) \qquad e^\lambda_{\mu\nu} = B^\lambda_\alpha(\partial_\nu B^\alpha_\mu + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} B^\beta_\mu B^\gamma_\nu) \equiv B^\lambda_\alpha \nabla_\nu B^\alpha_{(\mu)},$$

où les facteurs de projection B^λ_α complétés par C^ρ_α sont déterminés comme le système réciproque du système des n vecteurs contravariants indépendants (B^α_λ, C^α_ρ) avec C^α_ρ arbitrairement donnés. La géométrie A'_m dans le

([1]) *Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 1082.

sous-espace déformé X'_m

(3) $$x^\alpha = f^\alpha(u) + \varepsilon \xi^\alpha(u)$$

sera constituée de la même manière avec ses facteurs de projection déterminés de la façon suivante. Nous complétons (3) en une transformation de X_n en posant

(4) $$'x^\alpha = F^\alpha(u^1, \ldots, u^n) + \varepsilon \Xi^\alpha(u^1, \ldots, u^n),$$

avec

(5) $$F^\alpha(u^1, \ldots, u^n; 0, \ldots, 0) = f^\alpha(u), \qquad \Xi^\alpha(u^1, \ldots, u^n; 0, \ldots, 0) = \xi^\alpha(u),$$

et nous posons

(6) $$'C^\alpha_\rho = C^\alpha_\rho + (\partial_\rho \Xi^\alpha)_{u\sigma=0}.$$

Le système réciproque est déterminé ensuite comme d'habitude.

2. Pour obtenir une mesure de la déformation nous devons comparer la géométrie A'_m du sous-espace déformé avec un représentant de la géométrie A_m aux points $x + \varepsilon\xi$. Comme dans une transformation de X_m les variables u^k et leurs fonctions sont des invariants, on obtient le représentant le plus simple en attribuant aux points $x + \varepsilon\xi$ la même géométrie A_m. On obtient ainsi les formules

(7) $$\delta b_{\lambda\mu} \equiv b'_{\lambda\mu} - b_{\lambda\mu} = B^\alpha_\lambda B^\beta_\mu \delta a_{\alpha\beta},$$

(8) $$\delta e^\lambda_{\mu\nu} \equiv e'^\lambda_{\mu\nu} - e^\lambda_{\mu\nu} = B^\lambda_\alpha B^\beta_\mu B^\gamma \delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma},$$

où $\delta a_{\alpha\beta}$ et $\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sont donnés par les formules (5) et (6) de notre Note citée.

3. La définition des déformations diverses des vecteurs et tenseurs individuels peut être modelée sur les définitions correspondantes dans la même Note. Par exemple, pour la *déformation directe*, nous obtenons ainsi

(9) $$\Delta v^\lambda \equiv \bar{v}^\alpha(x \| x + \varepsilon\xi)\, 'B^\lambda_\alpha - v^\lambda = B^\lambda_\alpha \Delta\bar{v}^\alpha,$$

où $\bar{v}^\alpha = v^\lambda B^\alpha_\lambda$ sont les composantes de v^λ dans le système de référence de X_m, et plus généralement

(10) $$\Delta v^\rho_{\mu\nu} \equiv \bar{v}^\alpha_{\beta\gamma}(x \| x + \varepsilon\xi)\, 'C^\rho_\alpha\, 'B^\rho_\mu\, 'B^\gamma_\nu - v^\rho_{\mu\nu} = C^\rho_\alpha B^\beta_\mu B^\gamma_\nu \Delta\bar{v}^\alpha_{\mu\gamma},$$

ou encore

(11) $$\Delta v^\alpha_\mu = \bar{v}^\alpha_\beta(x \| x + \varepsilon\xi)\, 'B^\beta_\mu - v^\beta_\mu A^\alpha_\beta = B^\beta_\mu \Delta\bar{v}^\alpha_\beta.$$

Pour les tenseurs de structure, comme par exemple, pour le premier tenseur de courbure eulerienne,

$$F^{\rho}_{\mu\nu} = C^{\rho}_{\alpha}(\partial_{\nu} B^{\alpha}_{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} B^{\beta}_{\mu} B^{\gamma}_{\nu}) = C^{\rho}_{\alpha} \nabla_{\nu} B^{\alpha}_{(\mu)}, \tag{12}$$

on peut prendre, comme son représentant à $x + \varepsilon\xi$, le même tenseur reconstruit en ce point au moyen des facteurs de projection $'B$ et $'C$ et des paramètres de connexion $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x + \varepsilon\xi)$, c'est-à-dire

$$'F^{\rho}_{\mu\nu} = 'C^{\rho}_{\alpha}(\partial_{\nu} 'B^{\alpha}_{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x + \varepsilon\xi) 'B^{\beta}_{\mu} 'B^{\gamma}_{\nu}) = F^{\rho}_{\mu\nu} + \varepsilon C^{\rho}_{\alpha} B^{\beta}_{\mu} B^{\gamma}_{\nu} \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}. \tag{13}$$

On obtient ainsi la *déformation totale de structure*

$$DF^{\alpha}_{\beta\gamma} = F^{\alpha}_{\beta\gamma}(x \| x + \varepsilon\xi) - 'C^{\alpha}_{\rho} 'B^{\mu}_{\beta} 'B^{\nu}_{\gamma} 'F^{\rho}_{\mu\nu} = \Delta F^{\alpha}_{\beta\gamma} - C^{\alpha}_{\delta} B^{\eta}_{\beta} B^{\nu}_{\zeta} \delta\Gamma^{\delta}_{\eta\zeta}, \tag{14}$$

qui se réduit dans un espace de Riemann à $\delta H^{\alpha}_{\beta\gamma}$ de J. A. Schouten ([1]).

On a ainsi une interprétation bien simple de la formule compliquée donnée par Schouten sans démonstration détaillée.

4. L'opérateur δ ne s'applique pas directement aux tenseurs de X_m, car en général ils ne sont pas définis en dehors de X_m. Tout de même la différence $'F^{\rho}_{\mu\nu} - F^{\rho}_{\mu\nu}$ paraît correspondre à cette opération, c'est pourquoi nous posons

$$\delta F^{\rho}_{\mu\nu} = 'F^{\rho}_{\mu\nu} - F^{\rho}_{\mu\nu}. \tag{15}$$

Ces définitions sont justifiées aussi par le fait que *les règles de manipulation pour les opérateurs* Δ, δ et D données par les formules (15) et (16) de notre Note citée *s'étendent au cas actuel* pourvu que les facteurs de projection soient considérés comme des constantes.

Les formules compréhensives et détaillées que j'ai obtenues, en collaboration avec M. E.-T. Davies, par l'application de la méthode générale esquissée ici aux différents tenseurs de structure de A_m, seront exposées dans un travail qui paraîtra dans un autre Recueil.

([1]) *Proc. Kon. Akad. v. Wetenschappen*, Amsterdam, 31, 1928, p. 211.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'ensemble singulier d'une classe de séries de Taylor qui présentent des lacunes.* Note [1] de M. **Sixto Rios**.

Mandelbrojt a cru démontrer, comme complément à un théorème d'Ostrowski sur l'ultraconvergence des séries potentielles [2], le théorème suivant :

Si la série

(1) $$\psi(x)=\sum_n a_n x^{\lambda_n}$$

admet des lacunes telles que pour une succession λ_{n_i} *on ait*

(2) $$\lim_{i\to\infty}\frac{\lambda_{n_{i+1}}}{\lambda_{n_i}}=\infty,$$

les seules singularités possibles de la fonction représentée par la série (1) *sont des continues non bornées* [3].

Nous allons démontrer sur un exemple que le théorème n'est pas vrai.

On considère la série

(3) $$\psi(x)=\sum a_n x^{\lambda_n}=\sum_\nu [x(1-x)]^{2^{2^\nu}}$$

qui remplit la condition (2) puisque l'on a $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{2^{2^{\nu+1}}}{2.2^{2^\nu}}\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{2^{2^\nu}}{2}=\infty$. Si nous considérons la série $\sum\limits_\nu z^{2^{2^\nu}}$ qu'on obtient en faisant dans (3) : $x(1-x)=z$, celle-ci a la circonférence de convergence comme coupure essentielle (théorème de Hadamard-Fabry) et c'est pour cela que la fonction donnée a comme domaine total d'existence $|x(1-x)|<1$, c'est-à-dire son ensemble singulier est constitué par les points de la lemniscate $|x(1-x)|=1$.

---

[1] Séance du 30 octobre 1933.

[2] *Hamburg. Math. Abhand.*, 1922, p. 327.

[3] *Comptes rendus*, 176, 1923, p. 978; *Annales de l'École Normale supérieure*, 40, 1923, p. 413. On trouve aussi l'énoncé de ce théorème à la page 97 du livre de Hadamard et Mandelbrojt : *La série de Taylor et son prolongement analytique*. Aussi à la page 38 du livre de Mandelbrojt (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 54, 1933).

Il est donc un continu borné, au contraire de ce qu'affirme le théorème.

Voyons où se trouve l'erreur dans la démonstration de Mandelbrojt. Nous désignerons par (A) le théorème suivant d'Ostrowski :

Si la série, de rayon de convergence 1 : $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$, *admet des lacunes telles qu'elle ait une suite d'indices satisfaisant à la condition* (2), *alors la somme* $S_{n_i}=\sum_{n=1}^{n_i} a_n x^{\lambda_n}$ *converge en chaque point régulier de* $f(x)$ *et uniformément dans chaque domaine intérieur à la région d'existence. La fonction est donc uniforme dans toute la région d'existence* (*simplement connexe*) *et sa surface de Riemann a une seule feuille.*

Nous désignerons par (C) le théorème de Weierstrass sur les séries de fonctions holomorphes dans un domaine fermé et convergentes uniformément sur le contour, et par (B) le théorème suivant de Montel : Soit E un ensemble borné parfait et partout discontinu, soit F un ensemble contenu dans E et tel que tout ensemble contenant F et contenu dans E soit discontinu, on peut alors entourer F d'une ligne ne contenant aucun point de E; il y a même un canal autour δ qui ne contient pas de point de E.

Mandelbrojt considère un cercle ayant pour centre un point singulier p et il démontre rigoureusement que l'ensemble F des points singuliers contenus dans ce cercle K, augmenté des points de la circonférence, est parfait. Pour prouver qu'il est connexe, il suffit de démontrer que chaque sous-ensemble F_1 de F est contenu dans un continu qui à son tour est contenu en F.

S'il n'en était pas ainsi, il existerait un canal qui entourerait F_1 et que ne renfermerait pas des points de F. Mais cela, affirme Mandelbrojt, est en contradiction avec les théorèmes (A) et (C).

Eh bien, la contradiction existerait réellement si les points intérieurs à δ n'étant pas singuliers, étaient réguliers; mais il peut arriver qu'ils ne soient ni l'un ni l'autre. En effet, cela arrive si K est pris suffisamment grand pour qu'il soit tout entier contenu dans le champ d'existence de la fonction, si celui-ci est fini; cela arrive dans l'exemple exposé.

Il s'ensuit donc que la conclusion est celle-ci : l'ensemble formé par les points singuliers intérieurs à K, si aucun ne se trouve sur la circonférence, est un continu. Si quelqu'un de ces points se trouve sur elle, l'ensemble, augmenté de la circonférence, est un continu.

On a donc deux cas : 1° si grand que soit K, il existe toujours des points

singuliers sur la circonférence et c'est alors que les singularités de la fonction sont des continus non bornés; 2° pour un certain K tous les points singuliers sont intérieurs au cercle, et alors, comme on l'a démontré, ils forment un continu borné. Ce continu manque de points intérieurs et c'est pour cela qu'il est une ligne cantorienne. En outre, il est fermé, ce qu'on déduit immédiatement du théorème (C).

Il reste comme valable le théorème suivant :

Si la série $\psi(x) = \sum_n a_n x^{\lambda_n}$ *admet des lacunes telles que, pour une suite* λ_{n_i}, *on ait* $\lim_{l \to \infty} \lambda_{n_i+1}/\lambda_{n_i} = \infty$, *les singularités de la fonction représentée par cette série sont ou des continus non bornés ou une ligne cantorienne fermée.*

Un exemple du deuxième type est exposé dans cette Note; un exemple du premier est la série suivante d'Ostrowski $\sum_{k=1}^{\infty} z^{10^{10^k}} \sum_{n=1}^{10^4 \cdot 10^k} \frac{(-10^{2 \cdot 10^k})^n}{n!}$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur certaines conditions nécessaires pour la régularité d'une fonction en un point du cercle de convergence.* Note [1] de MM. **M. Fekete** et **S. Marshak**, présentée par M. Hadamard.

1. Soit

$$f(x) = r_0 + r_1 x + \ldots + r_n x^n + \ldots$$

une série entière à coefficients réels, le rayon de convergence étant égal à 1. Supposons que $x = 1$ soit un point régulier de $f(x)$. Alors, en posant

$$|r_n| + r_n = 2p_n, \qquad |r_n| - r_n = 2q_n, \tag{1}$$

on a (d'après les théorèmes de Cauchy-Hadamard et Vivanti-Pringsheim)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log p_n}{n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log q_n}{n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log |r_n|}{n} = 0. \tag{2}$$

2. A l'aide d'un résultat récent de MM. Heilbronn et Landau [2], nous pouvons compléter (2) en montrant que *sous les hypothèses du paragraphe* 1

---

[1] Séance du 31 juillet 1933.

[2] *Math. Zeitschrift*, 37, 1933, p. 17.

les p_n et q_n satisfont aussi à l'égalité

$$(3)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log p_n}{\log n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log q_n}{\log n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log |r_n|}{\log n} = \alpha \qquad (-\infty \leqq \alpha \leqq \infty).$$

Pour le vérifier, remarquons d'abord que le point $x = 1$ sera dans le cas considéré (d'après une proposition classique de M. Hadamard) un point régulier de $\sum_{n=0}^{\infty} r_n/(n+1)^\sigma x^n$. Ce fait, combiné avec le résultat susmentionné (qui, interprété convenablement, exprime que les deux relations

$$(4)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \rho_n < \infty, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \rho_n > -\infty,$$

ont simultanément lieu ou non pour toute série $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n$ à coefficients réels, convergente pour $|x| < 1$ et régulière pour $x = 1$), nous conduira, toujours sous les mêmes hypothèses, à la simultanéité des relations

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_n}{n^k} < \infty, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{q_n}{n^k} < \infty$$

pour $k \gtreqless 0$. Il en résulte (3) comme conséquence à peu près immédiate [il faudra tenir compte de la relation $|r_n| = \max\{p_n, q_n\}$, résultant de (1)].

3. Utilisant la notion d'ordre de M. Hadamard, le résultat peut s'énoncer :

Avec les suppositions et notations du paragraphe 1, *l'ordre des deux séries*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,$$

sur le cercle de convergence [de rayon 1, d'après (2)] *aura une même valeur* égale à $\alpha + 1$, ordre de $f(x) = g(x) - h(x)$. Plus généralement :

Soit $\rho \geqq -1$. *Sous l'hypothèse du paragraphe* 1, *l'ordre des deux séries*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\rho)} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{(\rho)} x^n,$$

représentant les fonctions $g(x)/(1-x)^{\rho+1}$, $h(x)/(1-x)^{\rho+1}$) *aura une même valeur* $\omega = \omega(\rho)$. Autrement dit

$$(5)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log P_n^{(\rho)}}{\log n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log Q_n^{(\rho)}}{\log n} = \omega - 1,$$

La démonstration de cette proposition repose sur deux faits :

1° Il suffit, pour la simultanéité des deux relations (4), de supposer $\varphi(x)$ borné dans le secteur $0 \leqq |x| < 1$, $|\operatorname{arc} x| \leqq \lambda$, $(0 < \lambda \leqq \pi)$.

2° La borne supérieure de $|\varphi(x)|$ dans un tel secteur étant donnée par B, la transformée $\varphi_\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n/(n+1)^\sigma x^n$ de $\varphi(x)$ y satisfera, pour $\sigma > 0$, à $|\varphi_\sigma(x)| \leqq B$ d'après son expression à partir de φ sous forme d'intégrale définie.

Je dis [ce qui suffit pour vérifier (5)] que les deux relations

$$(6) \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{P_n^{(\rho)}}{n^k} < \infty, \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{Q_n^{(\rho)}}{n^k} < \infty$$

(étant en défaut, eu égard à $p_n \geqq 0$, $q_n \geqq 0$, $p_n \not\equiv 0$, $q_n \not\equiv 0$, pour $k < \rho$) sont remplies ou non, pour un $k \geqq \rho > -1$, simultanément.

Dans le cas $\rho > 0$, il suffit, à cet effet, de considérer la fonction auxiliaire

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1-x)^{\rho+1}} \left[f(x) - \sum_{\nu=0}^{m} \frac{f^{(\nu)}(1)(x-1)^\nu}{\nu!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} R_n^{(\rho)} x^n - \sum_{\nu=0}^{m} \frac{f^{(\nu)}(1)(-1)^\nu}{\nu!(1-x)^{\rho+1-\nu}},$$

le nombre entier n étant assujetti aux inégalités $\rho \leqq m < \rho + 1$.

On voit aisément que, sous les hypothèses faites, cette fonction $\varphi(x)$ sera régulière pour $|x| < 1$ et uniformément bornée dans le secteur $|x| < 1$, $\operatorname{arc} x| \leqq \lambda$ pour $\lambda > 0$ convenablement choisi. Il en résulte, d'après 1° et 2°, la simultanéité des deux relations

$$(7) \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{R_n^{(\rho)}}{n^k} < \infty, \qquad \underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{R_n^{(\rho)}}{n^k} > -\infty,$$

pourvu que $x \geqq \rho > 0$, ce qui démontrera (eu égard à $R_n^{(\rho)} = P_n^{(\rho)} - Q_n^{(\rho)}$) la simultanéité des relations (6). Quant au cas $-1 < \rho \leqq 0$, la vérification de notre assertion est basée sur la considération de la fonction auxiliaire nouvelle

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n R_n^{(\rho)} x^{n-1} - \frac{f'(1)}{(1-x)^{\rho+1}} - (1+\rho) \frac{f(1) + f'(1)(x-1)}{(1-x)^{\rho+2}}$$
$$= \frac{f'(x) - f'(1)}{(1-x)^{\rho+1}} + (1+\rho) \frac{f(x) - f(1) - f'(1)(x-1)}{(1-x)^{\rho+2}}$$

régulière pour $|x| < 1$ et uniformément bornée dans un secteur

$$|x| < 1, \qquad |\operatorname{arc} x| \leqq \mu \qquad (0 < \mu \leqq \pi).$$

L'application de 1° et 2° à cette fonction (avec $\sigma = k + 1 \geqq \rho + 1$) fournira encore la simultanéité des deux relations (7) pour $k \geqq \rho$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les séries de Fourier des fonctions de carré sommable.* Note [1] de M. RAPHAËL SALEM, présentée par M. Jacques Hadamard.

Étant donnée la série

$$(1) \qquad \sum_{1}^{\infty} \rho_p \cos(px - \alpha_p) \qquad (\rho_p \geqq 0),$$

j'ai démontré [2] que si le reste de la série $\Sigma\rho_p^2$, supposée convergente, satisfait à l'inégalité

$$(2) \qquad \sum_{n+1}^{\infty} \rho_p^2 < \frac{A}{\log n (\log_2 n)^2 \ldots (\log_{\mu-1} n)^2 (\log_\mu n)^a} \qquad (a > 2),$$

on peut toujours choisir les α_p de façon que (1) soit la série de Fourier d'une fonction *continue*.

Cette proposition n'est plus vraie si l'on ne suppose que la convergence de la série $\Sigma\rho_p^2$ sans faire aucune autre hypothèse. Cela résulte d'un théorème de M. Szidon sur les séries à lacunes [3] et des théories classiques sur la convergence absolue. Je voudrais cependant montrer comment on peut le déduire, d'une façon immédiate et très simple, d'un résultat de M. Serge Bernstein.

Prenons $\rho_p = r_q$ pour $p = 4^q$ ($q = 1, 2, \ldots$) et $\rho_p = 0$ pour les autres valeurs de p (Σr_q^2 étant convergente). Notre série prend la forme

$$(3) \qquad \sum_{1}^{\infty} r_q \cos(4^q x - \beta_q).$$

Or M. Bernstein a démontré [4] que *quels que soient les* β_q il existe toujours une solution commune aux k inéquations congruentielles

$$|4^q x - \beta_q| \leqq \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \qquad (q = 1, 2, \ldots, k).$$

---

[1] Séance du 13 novembre 1933.

[2] *Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 113.

[3] *Mathematische Annalen*, **97**, 1927, p. 675-676.

[4] *Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 213.

solution que nous désignerons par x_k. On voit alors que, pour $x = x_k$, la somme de Féjer $\sigma_k(x)$, de rang 4^k relative à notre série, est supérieure au produit par $1/\sqrt{2}$ de la moyenne arithmétique des 4^k premières sommes partielles de la série à termes non négatifs $\Sigma\rho_p$. Si donc Σr_q diverge, $\sigma_k(x_k)$ tend vers $+\infty$ avec k, ce qui suffit à prouver que, *quels que soient les* β_q, la fonction, dont (3) est la série de Fourier, n'est jamais bornée supérieurement. Elle n'est donc, non plus, jamais bornée inférieurement.

Remarquons que la divergence de Σr_q peut être aussi lente qu'on voudra. Prenons, en particulier,

$$r_q = \frac{1}{q \log q \log_2 q \ldots \log_{\mu-1} q},$$

on aura

$$\sum_{k+1}^{\infty} r_q^2 < \frac{1}{(\log k \log_2 k \ldots \log_{\mu-1} k)^2} \sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{q^2} < \frac{1}{k(\log k)^2 \ldots (\log_{\mu-1} k)^2}$$

ou, en posant $n = 4^k$,

$$\sum_{n+1}^{\infty} \rho_p^2 < \frac{A}{\log n (\log_2 n)^2 \ldots (\log_{\mu-1} n)^2 (\log_\mu n)^2},$$

ce qui prouve que, dans la condition donnée par l'inégalité (2), l'exposant a ne peut pas être réduit à 2.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les champs de demi-droites et les équations différentielles du premier ordre.* Note (¹) de M. **André Marchaud**, transmise par M. Émile Borel.

1. A tout système de n équations différentielles de variables réelles du premier ordre, résolues par rapport aux dérivées, correspond dans un espace euclidien à $n+1$ dimensions un « champ » de demi-droites. Le problème de la détermination des intégrales étant un problème de Géométrie, il y a intérêt à porter son attention non pas sur les fonctions mais sur le « champ ». L'objet de la présente Note est d'introduire certaines notions, relatives aux champs de demi-droites, qui conduisent, pour l'existence des intégrales, à une condition suffisante *ne supposant pas la continuité des fonctions*.

(¹) Séance du 13 novembre 1933.

2. Soient R un ensemble ponctuel (dense en lui-même), situé dans un espace euclidien à $n+1$ dimensions, et $\Delta(m)$ un champ de demi-droites défini sur R. Considérons un domaine D (contenant des points de R), et par un point fixe q menons la parallèle à chaque $\Delta(\overline{m})$ dont l'origine $\overline{m}$ appartient à D. On dira que le champ est *borné en direction* dans D, s'il existe un demi-cône de révolution (non plat), de sommet q, contenant toutes ces parallèles. Le plus petit demi-cône convexe satisfaisant ces conditions sera appelé la *borne convexe* du champ dans D. Elle est définie à une translation près. On désignera par B (D, q) celle ayant pour sommet le point q.

Considérons maintenant un point m_0 de R, et une suite de sphères S_1, S_2, ..., S_n, ... de centre m_0, intérieures les unes aux autres, dont les rayons tendent vers zéro. On dira que le champ est *borné en direction* en m_0 s'il l'est dans une des S_n. La limite $B(m_0)$ de $B(S_n, m_0)$, quand $n \to \infty$, est par définition la *borne convexe du champ* en m_0. Elle est indépendante des S_n; d'autre part, elle contient évidemment $\Delta(m_0)$. Lorsqu'elle se réduit à cette demi-droite le champ est continu en m_0.

3. L'importance de la notion de borne convexe est mise en évidence par le fait suivant. *Si un arc simple* $\widehat{ab}$, *situé sur* R, *possède en chacun de ses points intérieurs* $\overline{m}$ *une semi-tangente* (¹) *à droite dans* $B(\overline{m})$, *alors partout (sauf en* b*) toutes les semi-tangentes à droite sont dans la borne convexe au point considéré.*

Ce résultat suggère l'idée de serrer l'étude locale du champ en considérant non pas *tout* le voisinage de chaque point m_0, mais seulement la partie comprise dans un demi-cône légèrement plus grand que $B(m_0)$. Soit alors $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots$ une suite de demi-cônes convexes de sommet m_0, intérieurs les uns aux autres, ayant pour limite $B(m_0)$. Posons $D_n = S_n \times \Gamma_n$, la suite $B(D_n, m_0)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, a une limite $B_1(m_0)$ (indépendante des sphères et des demi-cônes), contenue dans $B(m_0)$, mais pas nécessairement confondue avec elle. Or il arrive que B_1 peut remplacer B dans la *conclusion* de la proposition précédente. Ceci conduit à opérer sur B_1 comme on l'a fait sur B, et ainsi de suite. On formera de la sorte une suite de bornes convexes emboîtées (indépendantes des sphères et des demi-cônes), $B(m_0)$, $B_1(m_0)$, ..., $B_2(m_0)$, ..., ayant une limite $B_\omega(m_0)$. Si l'on répète l'opération sur $B_\omega(m_0)$ on retrouve $B_\omega(m_0)$.

(¹) Une semi-tangente est un rayon du *contingent* de M. G. Bouligand. On pourra consulter à ce sujet ma Note des *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 948.

J'appelerai cette dernière borne le *résidu convexe* en m_0. Il contient évidemment $\Delta(m_0)$. Lorsqu'il se réduira à cette dernière, je dirai que le champ est *régulier* en m_0. *Un champ régulier en un point n'est pas forcément continu en ce point*, l'inverse a lieu nécessairement.

4. Voici quelques applications des notions précédentes :

1° *Soient* $\overset{\frown}{ab}$ *un arc simple et deux champs de demi-droites opposés* [1], *définis sur un ensemble contenant* $\overset{\frown}{ab}$ *et réguliers sur cet arc.*

Si ab possède en tout point intérieur une semi-tangente, pour un côté variable ou non, dans la borne convexe en ce point de l'un des champs, LE MÊME POUR TOUT L'ARC, $\overset{\frown}{ab}$ *admet partout deux demi-tangentes opposées continues, sauf peut-être en un point de rebroussement unique, ce qui ne peut avoir lieu que si la semi-tangente considérée l'est pour un côté variable.*

La restriction soulignée ne peut être supprimée *même s'il s'agit de semi-tangentes pour un côté invariable.* Il suffit pour le voir de considérer la fonction sans dérivée de Weierstrass.

2° *Soit* $\Delta(m)$ *un champ régulier dans une sphère de centre* O; *il existe dans la sphère un arc simple rectifiable* $\overset{\frown}{ab}$, *traversant le point* O, *qui possède en tout point m/b une demi-tangente à droite continue à droite :* $\Delta(\overline{m})$, *et, sauf peut-être sur un ensemble dénombrable, deux demi-tangentes opposées.*

Si le champ opposé à $\Delta(m)$ *est lui aussi régulier,* $\overset{\frown}{ab}$ *admet partout deux demi-tangentes opposées continues.*

5. Les démonstrations ainsi que d'autres propriétés (relatives à l'unicité et à la continuité des intégrales par rapport aux conditions initiales) paraîtront dans un autre Recueil. On y trouvera également l'exemple d'une *fonction* $f(x,y)$ *discontinue sur l'ensemble des points rationnels du plan*, telle que le champ défini en chaque point (x,y) par la demi-droite des paramètres $[1,(fx,y)]$ soit régulier partout, ainsi que le champ opposé. Il résulte alors de 2° que, *par tout point du plan, il passe une intégrale de l'équation* $dy/dx = f(x,y)$, *admettant partout une dérivée continue*. De plus, la fonction étant non croissante par rapport à y, *l'intégration à droite en chaque point est unique*.

---

[1] C'est-à-dire dont les demi-droites sont respectivement opposées.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur un problème de la théorie du potentiel.* Note (¹) de M. **Georges Bouligand**, présentée par M. Élie Cartan.

Dans l'espace euclidien à trois dimensions, soit donné un domaine borné Ω dont la frontière Σ est telle que chaque partie connexe saturée soit une surface ayant, de chaque côté, une sphère d'appui de rayon constant. Soit donnée, en chaque point Q de Σ, par son vecteur unitaire $\overrightarrow{u_Q}$, une direction dépendant continûment de Q. Il s'agira de la question suivante :

Problème $\mathfrak{T}$. — *Trouver une fonction* $h(P)$ *harmonique dans* Ω, *connaissant en chaque point* Q *de* Σ, *la dérivée* g_Q *de* $h(P)$ *dans la direction* $\overrightarrow{u_Q}$ [ce qui implique la recherche de conditions suffisantes pour la continuité en chaque point de Σ de la dérivée de $h(P)$ suivant un $\overrightarrow{u_P}$ défini en tout point P de Ω voisin de Σ, et se réduisant à $\overrightarrow{u_Q}$ sur Σ, avec continuité en chaque point de Σ dans le champ $\Omega + \Sigma$].

Une théorie récente de M. Georges Giraud (²) atteint comme application particulière le problème $\mathfrak{T}$, lorsque $\overrightarrow{u_Q}$, continu à la Lipschitz, *ne devient jamais tangent à* Σ. J'avais montré en 1926 (³) qu'en l'absence de cette dernière hypothèse, une indétermination très large peut se présenter pour $\mathfrak{T}$: prenons pour Σ une seule surface coupée en deux points au plus par une demi-droite issue d'un point fixe O extérieur à Ω, et pour direction liée à chaque point Q, celle de OQ ; notre problème homogène admet alors pour solution toute fonction harmonique homogène (O étant l'origine) de degré zéro régulière dans le demi-cône de sommet O circonscrit à Ω; dans les mêmes conditions, j'ai pu montrer que le problème non homogène est toujours possible et qu'on en détermine une solution en donnant ses valeurs le long de la courbe de contact.

On obtient des ensembles plus ou moins riches de solutions du problème homogène $\mathfrak{T}_0$ en prenant une congruence dont il passe une seule courbe par chaque point de $\Omega + \Sigma$ et dont les courbes engendrent certaines familles de surfaces isothermes (correspondant à des répartitions de températures régulières et uniformes dans Ω) : on suppose alors $\overrightarrow{u_Q}$ confondu, en chaque

(¹) Séance du 13 novembre 1933.

(²) *Comptes rendus*, 195, 1932, p. 454-456.

(³) *C. R. Congrès Soc. Sav.*, 59, 1926, p. 68-73.

point de Σ, avec la tangente à la ligne de la congruence passant en ce point. Cette remarque conduit à prolonger la recherche dans la voie suivie par M. Delens (ci-dessus page 1163).

La coplanarité sur Σ des gradients de $n \geqq 3$ fonctions harmoniques n'entraînant pas forcément la même coplanarité dans Ω (exemple : fonctions harmoniques dans un tore et constantes le long de chaque méridien), on ne peut, de ce qu'une congruence s'adapterait sur Σ au champ $\vec{u}_Q$, conclure qu'elle soit la seule.

L'exemple qui vient d'être cité (ou aussi bien tout autre équivalent à une déformation près) dans lequel une solution de $\mathcal{P}_0$ est déterminée par ses valeurs le long d'un contour fermé (parallèle du tore ou courbe équivalente), conduit pour le problème $\mathcal{P}$ non homogène à *une infinité de conditions de possibilité*. C'est encore ce qui se produit lorsque, la direction donnée étant la même en tous les points de Σ, le domaine Ω contient une couche comprise entre deux sphères concentriques en laissant échapper une partie du volume de la petite sphère.

Des développements sur ces divers points sont à l'impression dans un autre Recueil.

Ajoutons que, dans le plan, la colinéarité périphérique des gradients entraîne la colinéarité interne pour deux fonctions harmoniques dont l'une est la partie réelle d'une fonction $f(z)$ univalente et holomorphe dans Ω.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la fonction harmonique conjuguée d'une fonction harmonique bornée*. Note [1] de M. **Julius Wolff**, transmise par M. Émile Borel.

Soient $u(z) = u(x+yi)$ harmonique et bornée ($|u| < M$) dans le demi-plan $D(x > 0)$ et $v(z)$ une fonction conjuguée de $u(z)$, de sorte que $w(z) = u(z) + iv(z)$ est holomorphe dans D.

Pour que $v(z) - v(|z|)$ *soit bornée dans chaque demi-plan* $D_\alpha(x \geqq \alpha > 0)$, *il faut et il suffit que la fonction de y définie par l'intégrale*

$$(1) \qquad \int_1^{|y|} \frac{u(yi+\tau i) - u(yi-\tau i)}{\tau}\, d\tau$$

soit bornée pour $|y| > 1$.

---

(1) Séance du 13 novembre 1933.

Pour le démontrer partons de la représentation

$$v(z) = \text{const.} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{t-y}{x^2+(t-y)^2} - \frac{t}{1+t^2}\right\} u(ti)\,dt.$$

Il vient

$$(2) \qquad v(z) - v(|z|) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2-|z|^2}{t^2+|z|^2}\,\frac{u(ti)}{x^2+(t-y)^2}\,dt.$$

Pour $|y| < 1$ l'expression (2) est plus petite que M/x en valeur absolue. Bornons-nous donc au cas $|y| \geqq 1$.

On vérifie facilement que le changement de $|z|$ en $|y|$ dans (2) fait subir à cette expression un changement dont la valeur absolue ne surpasse pas $\frac{1}{2}M$, quel que soit z dans D. Écrivons pour l'expression ainsi modifiée

$$\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2-y^2}{t^2+y^2}\,\frac{u(ti)}{x^2+(t-y)^2}\,dt = \frac{y}{\pi}\left\{\int_{|t-y|>|y|} + \int_{|t-y|<1} + \int_{1\leqq|t-y|\leqq|y|}\right\}$$

$$= \frac{y}{\pi}(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3).$$

Or

$$(3) \qquad \left|\frac{y}{\pi}\mathcal{J}_1\right| < \left|\frac{2My}{\pi x}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{y}\right| < \frac{2M}{\pi}$$

et

$$(4) \qquad \left|\frac{y}{\pi}\mathcal{J}_2\right| < \left|\frac{My}{\pi}\int_{|t-y|<1}\frac{|t|+|y|}{t^2+y^2}\,\frac{dt}{x^2+(t-y)^2}\right| < \frac{2M}{x}.$$

Dans $\mathcal{J}_3$ posons $t = y + \tau$. Il vient

$$(5) \qquad \left|\frac{y}{\pi}\mathcal{J}_3\right| = \frac{y}{\pi}\int_{1\leqq\tau\leqq|y|}\frac{\tau(2y+\tau)}{(x^2+\tau^2)\left\{y^2+(y+\tau)^2\right\}}\,u(yi+\tau i)\,d\tau.$$

On vérifie facilement que le changement de $y(2y+\tau)/y^2+(y+\tau)^2$ en 1 dans (5) fait subir à cette expression un changement dont la valeur absolue ne surpasse pas $4M/\tau$, quel que soit z dans D. Donc

$$(6) \qquad \left|\frac{y}{\pi}\mathcal{J}_3\right| < \frac{4M}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left|\int_1^{|y|}\frac{u(yi+\tau i)-u(yi-\tau i)}{x^2+\tau^2}\,\tau\,d\tau\right|.$$

Si $x = a > 0$, la valeur absolue de la différence entre l'intégrale dans (6) et l'intégrale (1) ne surpasse pas Ma, d'où la nécessité de la condition dans le théorème à démontrer.

Soit maintenant satisfaite la condition (1). Remarquons d'abord que pour $x \geqq |y|$ l'expression (2) ne surpasse pas M en valeur absolue. La

combinaison des deux dernières remarques permet de conclure que la fonction holomorphe $\psi(z) = w(z) - w(-iz)$ est bornée pour $x \geqq a, y = x$ et aussi pour $x = a$. La représentation du domaine $\Delta(x \geqq a, y \geqq x)$ sur le cercle unité et l'application de l'intégrale de Poisson conduisent à $\psi(z)$ bornée dans Δ. Mais $w(-iz) - w(|z|)$ est bornée dans Δ, parce que, z étant dans Δ, $-iz$ se trouve dans l'angle $x < |y|$. Donc $w(z) - w(|z|)$ est bornée dans Δ. De même dans le domaine $(x \geqq a, y \leqq -x)$. Comme cette différence est bornée dans l'angle $x < |y|$, elle est bornée dans D_a, et le théorème est démontré.

Une petite modification de la démonstration conduit au théorème : *Pour que* $v(z) - v(|z|)$ *tende vers zéro dans chaque* D_a, *quelle que soit la manière dont* z *tend vers l'infini, il faut et il suffit que la fonction* (1) *tende vers zéro pour* $|y| \to \infty$.

Signalons deux conséquences :

1° *Pour que* $v(z)$ *soit bornée dans chaque* D_a, *il faut et il suffit que l'intégrale* (1) *et l'intégrale* $\int_1^{|y|} \frac{u(\tau i) - u(-\tau i)}{\tau} d\tau$ *soient bornées pour* $|y| > 1$;

2° *Pour que* $v(z)$ *tende vers une limite finie dans chaque* D_a, *quelle que soit la manière dont* z *tend vers l'infini, il faut et il suffit que l'intégrale de Fatou* $\int_1^{\infty} \frac{u(\tau i) - u(-\tau i)}{\tau} d\tau$ *ait un sens et que la fonction* (1) *tende vers zéro pour* $|y| \to \infty$.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Remarques sur les Communications de M. Minetti au sujet d'un espace composé de fonctions holomorphes.* Note de M. **Maurice Fréchet**, présentée par M. Émile Borel.

Les observations suivantes peuvent compléter utilement les trois intéressantes Communications de M. Minetti [1] :

1° On peut rendre complet l'espace défini par M. Minetti en le prolongeant convenablement.

Soit en effet $a(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n + \ldots$ une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle C : $|z| \leqq 1$. On sait que si la série $\sum_n |a_n|^2$ est convergente, alors $a(rz)$ tend vers une limite finie déterminée quand le nombre

(1) *Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 221, 474, 637.

réel r tend en croissant vers l'unité, z prenant une position fixe, cette position étant arbitraire sur C à l'exception, peut-être, d'un ensemble E de mesure nulle. La fonction $a(z)$, donnée à l'intérieur de C, devient déterminée sur C si on la prend égale à cette limite là où elle existe et à zéro sur E. On sait aussi qu'alors $|a(z)|^2$ est sommable sur C et que l'on a

$$\sum_n |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_C |a(z)|^2 |dz|. \tag{1}$$

Soit h_2 l'ensemble des fonctions telles que $a(z)$. La différence de deux fonctions de h_2 appartient à h_2. Le nouvel espace H_2 sera l'espace constitué des éléments de h_2, c'est-à-dire des fonctions holomorphes à l'intérieur de C et de carré sommable sur C, et sur lequel on définit la distance de deux éléments $b(z)$, $c(z)$ par l'expression

$$(b, c) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_C |b(z) - c(z)|^2 |dz|}.$$

Cet espace H_2 est un espace distancié vectoriel qui est complet et séparable [1]. Il est applicable sur l'espace complexe de Hilbert.

2° Dans cet espace H_2, la définition de la limite qui s'y déduit de l'expression de la distance n'est pas facile à exprimer directement de façon simple. Contentons-nous d'observer que : si f_p, f étant des éléments de H_2, (f_p, f) tend vers zéro, non seulement $|f_p(z) - f(z)|$ convergera uniformément vers zéro sur tout cercle intérieur à C, mais encore le produit $\sqrt{1-|z|}\,|f_p(z) - f(z)|$ convergera uniformément vers zéro dans et sur C.

3° Nous avons déjà fait connaître oralement ces observations quand nous avons appris tout récemment que MM. Tamarkine et Hille ont étudié [2] un espace analogue à H_2, mais où l'intérieur de C se trouve remplacé par le demi-plan complexe supérieur. J'ajoute que le Mémoire étendu dont M. Minetti n'a donné dans les *Comptes rendus* qu'un très bref résumé est déjà à l'impression et que M. Minetti a bien voulu m'en communiquer les épreuves il y a plusieurs mois. Le fait que M. Minetti a été conduit par des considérations géométriques à l'étude de son espace, tandis que MM. Tamarkine et Hille avaient en vue l'étude des intégrales de

(1) Voir, pour la signification de ces expressions, l'index de mon livre *Les Espaces abstraits*, 1928.

(2) *Proc. Amer. Nat. Ac. Washington*, **19**, 1933, p. 902.

Laplace-Stieltjes, ne peut qu'augmenter l'intérêt des définitions si semblables de la distance considérées par l'un et par les autres en vue d'objectifs si différents.

4° On trouve fréquemment défini le produit vectoriel $\beta \times \gamma$ de deux fonctions complexes $\beta(z)$, $\gamma(z)$ déterminées sur C par la formule dissymétrique

$$\beta \times \gamma = \frac{1}{2\pi}\int_C \beta(z)\bar{\gamma}(z)\,|dz|, \tag{2}$$

en désignant par $\bar{\gamma}$ le nombre complexe conjugué de γ.

Si l'on observe que pour trois éléments quelconques $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ de H_2, on a

$$|(a, b) - (a, c)| \leq (b, c) \leq (a, b) + (a, c),$$

il paraîtra naturel de poser

$$(b, c)^2 = (a, b)^2 + (a, c)^2 - 2(a, b)(a, c)\cos(ab, ac),$$

formule qui donne pour $\cos(ab, ac)$ une valeur réelle comprise entre -1 et $+1$ et bien déterminée si a est différent de b et de c. Mais alors, on pourra écrire la formule classique simple

$$(b-a) \times (c-a) = (a, b)(a, c)\cos(ab, ac),$$

si l'on a soin de *remplacer la formule* (2) *par la formule symétrique*

$$\beta \times \gamma = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\beta(z)\bar{\gamma}(z) + \bar{\beta}(z)\gamma(z)}{2}\,|dz|. \tag{3}$$

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur un théorème de MM. Carathéodory et Féjer.* Note de M. **Chr. Fousianis**, présentée par M. Élie Cartan.

L'inégalité bien connue de MM. Carathéodory et Féjer entre le module maximum d'une fonction $f(z)$ et ses racines dans un cercle, dans lequel $f(z)$ est holomorphe [1], conduit à des conséquences intéressantes sur les racines des polynomes algébriques.

Désignons en effet par $r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_m$ les modules des racines du polynome

$$\varphi(z) = z^m + \alpha_{m-1}z^{m-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0;$$

[1] C. Carathéodory et L. Féjer, *Comptes rendus*, 145, 1907, p. 163.

rangées par ordre de grandeur. Considérons un cercle $|z| < r$ de rayon $r \geqq 1$, et soit n le nombre des racines de $\varphi(z)$ qu'il contient. D'après le résultat de MM. Carathéodory et Féjer, on aura en un point au moins de la circonférence $|z| = r$ l'inégalité

$$|\varphi(z)| > \frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} |(0)|.$$

Il suit de là qu'on pourra écrire

$$r^m + |\alpha_{m-1}| r^{m-1} + \ldots + |\alpha_0| > \frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} r_1 r_2 \ldots r_m,$$

et par conséquent, dans le cas où $m - n = k > 0$,

$$r^m + |\alpha_{m-1}| r^{m-1} + \ldots + |\alpha_0| > r^n . r_{n+1} . r_{n+2} \ldots r_{n+k}.$$

Posons

$$\Theta = 1 + |\alpha_{m-1}| + \ldots + |\alpha_0|,$$

et soit λ un nombre entier positif ou nul plus petit que k; on pourra écrire

$$r^k \Theta > r_{n+1} r_{n+2} \ldots r_{n+\lambda} . r_{n+\lambda+1}^{k-\lambda},$$

d'où l'on tirera la relation

(1) $$r \sqrt[k-\lambda]{\Theta} > r_{n+\lambda+1}.$$

Par conséquent il existe au moins $(\lambda + 1)$ racines du polynome $\varphi(z)$ dans l'anneau $\left(r, r \sqrt[k-\lambda]{\Theta}\right)$. Nous avons donc établi le théorème suivant :

Théorème I. — *Soit* $\varphi(z) = z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \ldots + \alpha_0$ *un polynome dont* k *racines satisfont à la relation* $|z| \geqq r \geqq 1$. *Si l'on a* $k > 0$, *il existera pour chaque nombre entier positif ou nul* $\lambda < k$ *au moins* $(\lambda + 1)$ *racines de* $\varphi(z)$ *dans l'anneau* $\left(r, r \sqrt[k-\lambda]{\Theta}\right)$, *le nombre* Θ *étant défini comme précédemment.*

Il suit de là, en prenant $r = 1$, qu'il ne peut y avoir plus de $(k - \lambda - 1)$ racines du polynome $\varphi(z)$ à l'extérieur du cercle

$$|z| = \sqrt[k-\lambda]{\Theta},$$

ou sur sa circonférence; on en conclut :

Théorème II. — *Le nombre des racines du polynome*

$$\varphi(z) = z^m + \alpha_{m-1} z + \ldots + \alpha_0$$

qui se trouvent en dehors ou sur la circonférence du cercle $|z| = \sqrt[\nu]{\Theta}$ *ne dépasse jamais* $(\nu - 1)$, *le nombre* ν *étant un entier quelconque.*

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur la polarisation des électrons diffusés.* Note [1] de M. **W. M. Elsasser**, présentée par M. Louis de Broglie.

Th. Förster [2] montre que l'on n'obtient pas d'effet de polarisation lors de la réflexion d'un jet électronique par un potentiel dont la variation ne dépend que d'une seule coordonnée. Nous indiquons ici une généralisation simple de ce résultat en montrant que pour un potentiel quelconque la méthode de Born ne donne jamais en première approximation un effet de polarisation. Pour le cas spécial du potentiel coulombien ce résultat a été trouvé par Mott [3], qui a montré que les effets de polarisation interviennent seulement dans les termes de second ordre. Notre résultat général permet d'exclure la possibilité d'un effet observable de polarisation pour une classe très étendue de phénomènes de diffusion électronique.

L'énoncé qu'un potentiel à variation unidimensionnelle ne donne pas un effet de polarisation contient, comme tous les théorèmes de ce genre, deux parties distinctes. La première partie exprime qu'un tel potentiel ne peut pas être employé comme polariseur. En général la direction du spin subit une rotation lors de la diffusion de l'onde, mais cette rotation étant en notre cas la même pour toutes les directions primitives du spin, aucune direction ne sera avantagée par rapport à une autre. La deuxième partie du théorème exclut l'usage d'un tel potentiel comme analyseur : le pouvoir de réflexion du potentiel ne dépend pas de la direction du spin de l'onde incidente.

Soit

$$\psi_0 = \tau_0 e^{i\vec{k}_0\vec{r}}$$

l'onde incidente, où τ_0 désigne un « spineur », grandeur à quatre composantes complexes. Soit $\vec{k}_1$ le vecteur d'onde de l'électron diffusé. On a $|k_0| = |k_1|$ pour un choc élastique et $|k_0| > |k_1|$ pour un choc inélastique. En général, l'onde diffusée dans une certaine direction ne représentera plus un « cas pur », mais un ensemble statistique consistant en une superposition de spins de différentes directions. Nous écrirons symboliquement

$$\psi_1 = \sum_i \tau_{1i} e^{i\vec{k}_1\vec{r}}$$

---

(1) Séance du 13 novembre 1933.

(2) Th. Förster, *Zeits. f. Phys.*, 85, 1933, p. 514.

(3) N. F. Mott, *Proc. Roy. Soc.*, 135, 1932, p. 429.

pour l'expression asymptotique de l'onde diffusée. La probabilité de transition de la direction $\vec{k}_0$ dans la direction $\vec{k}_1$ est donnée par l'expression

$$(1) \qquad P = \frac{m^2}{4\pi^2 h^4} \left| \sum \tau_{1i}^* \tau_0 \int V_{01}(\vec{r})\, e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_1)\vec{r}}\, dv_r \right|^2.$$

Nous décomposons le potentiel d'interaction V_{01} en une intégrale de Fourier

$$V_{01}(\vec{r}) = \int U(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\, dv_k.$$

En substituant cette expression dans (1) on obtient, en vertu de la relation

$$\int e^{i(-\vec{k}+\vec{k}_0-\vec{k}_1)\vec{r}}\, dv_r = (2\pi)^{\frac{3}{2}}\, \delta(\vec{k} - \vec{k}_0 + \vec{k}_1),$$

la valeur de la probabilité

$$(2) \qquad P = \frac{2\pi m^2}{h^4} \left| \sum_i \tau_{1i}^* \tau^0\, U(\vec{k}_0 - \vec{k}_1) \right|^2.$$

Comme on pouvait s'y attendre, c'est seulement la composante harmonique du potentiel, pour laquelle $\vec{k} = \vec{k}_0 - \vec{k}_1$, qui intervient dans l'expression de la probabilité de diffusion. On a donc un potentiel à variation unidimensionnelle. Pour reconnaître qu'avec cette approximation un corps diffuseur ne peut servir ni comme polarisateur, ni comme analyseur, on n'a qu'à appliquer le raisonnement mentionné ci-dessus séparément pour chaque direction de l'onde diffusée.

Ajoutons une remarque d'ordre général. Quelle est la relation entre les qualités de polariseur et d'analyseur pour un corps diffuseur quelconque? Quand $\sum_i \tau_{1i}^* \tau_0$ varie en fonction de τ_0, le pouvoir de réflexion dépend de la direction τ_0 du spin [cf. formule (2)], et le corps peut servir comme analyseur. D'autre part, si le jet incident d'électrons se compose d'un ensemble statistique de spins, répartis d'une manière homogène dans toutes les directions, cet ensemble ne sera plus homogène après réflexion, si $\sum \tau_{1i}^* \tau_0$ varie avec τ_0, et c'est là la propriété du polariseur. En effet, la grandeur $\tau_1^* \tau_0$ représente un produit scalaire de deux spineurs et, si tous les produits scalaires sont constants, un ensemble de spins subit une rotation dans l'espace des spineurs correspondant à la rotation d'un corps

rigide. Mais, si les produits scalaires ne sont pas constants, l'ensemble des spins subit une déformation, ce qui correspond à une variation de la densité de l'ensemble pour les différentes directions du spin (jet d'électrons polarisé).

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Sur les corrections à apporter aux caractéristiques aérodynamiqnes d'une aile sustentatrice expérimentée dans une soufflerie à veine rectangulaire semi-guidée par des parois parallèles à l'envergure de l'aile et à la vitesse du vent.* Note [1] de M. **Albert Toussaint**, présentée par M. Henri Villat.

Soit une veine rectangulaire de largeur b (supposée horizontale), de hauteur h, *limitée* seulement par un plancher et par un plafond horizontaux. Soit une aile sustentatrice d'envergure L, de surface S, disposée horizontalement dans la veine semi-guidée. Nous supposerons une répartition uniforme de la circulation Γ, le long de l'envergure L. Le système tourbillonnaire remplaçant l'aile réelle comportera deux demi-tourbillons libres $\pm\Gamma$ aux extrémités de l'envergure.

Les conditions de limitation de ln veine fluide équivalent à des doubles files verticales de demi-tourbillons, image des demi-tourbillons libres de l'aile réelle. Ces images sont à circulation inversée pour les parois horizontales inférieures et supérieures, et non inversée pour les côtés verticaux.

Dans l'ensemble, on a des files verticales de demi-tourbillons alternés avec un demi-tourbillon, origine $+\Gamma$ ou $-\Gamma$, suivant la file considérée. Rapportons le système à des axes Ox et Oy passant par le centre de l'aile et tels que Ox est horizontal.

Nous calculerons la vitesse moyenne v_m due aux demi-tourbillons images et définie par l'expression

$$v_m = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} v_x \, dx,$$

v_x étant la vitesse en un point x de l'envergure.

Le potentiel complexe pour une file verticale $x_m = mb$, comportant les

(1) Séance du 13 novembre 1933.

tourbillons $(-1)^n\Gamma$ aux ordonnées $y = \pm inh$, s'écrit

$$f = \frac{\Gamma}{2i\pi}\operatorname{Log}\frac{h}{2}\operatorname{th}\frac{\pi(z-mb)}{2h}.$$

La vitesse complexe en un point z du plan de l'aile sera, pour une file de *demi-tourbillons*,

$$\frac{1}{2}\frac{df}{dz} = \frac{\Gamma}{4i\pi}\frac{\pi}{h}\operatorname{coséch}\frac{\pi(z-mb)}{h} = -iv_z.$$

En un point $z = x$ on aura donc

$$v_x = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\pi}{h}\operatorname{coséch}\frac{\pi(x-mb)}{h} \qquad \text{et} \qquad \int v_x\,dx = \frac{\Gamma}{4\pi}\operatorname{Log}\left[\operatorname{th}\frac{\pi}{2h}(x-mb)\right],$$

En appliquant ce résultat pour la double file d'origine $\pm L/2$ avec les circulations $\pm\Gamma$, on aura

$$\int_{(x_0)} v_x\,dx = \frac{\Gamma}{4\pi}\operatorname{Log}\frac{\operatorname{th}\dfrac{\pi}{2h}\left(x-\dfrac{L}{2}\right)}{\operatorname{th}\dfrac{\pi}{2h}\left(x+\dfrac{L}{2}\right)}.$$

Nous devons retrancher de cette expression la valeur correspondante due aux demi-tourbillons libres de l'aile réelle, soit

$$-\frac{\Gamma}{4\pi}\operatorname{Log}\frac{x+\dfrac{L}{2}}{x-\dfrac{L}{2}}.$$

On a donc, pour les images que comporte cette double file origine,

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} v_x\,dx = -\frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{Log}\frac{\operatorname{th}\dfrac{\pi L}{2h}}{\dfrac{\pi L}{2h}}.$$

Pour une double file $x_m = mb$ la vitesse induite v_x est égale à celle que la double file origine produit entre $x_1 = mb - L/2$ et $x_2 = mb + L/2$. Donc :

$$\int_{(x_m)} v_x\,dx = -\frac{\Gamma}{4\pi}(-1)^m\operatorname{Log}\frac{\operatorname{th}\dfrac{\pi}{2h}(mb+L)\operatorname{th}\dfrac{\pi}{2h}(mb-L)}{\operatorname{th}^2\dfrac{\pi mb}{2h}}.$$

En définitive, la vitesse induite moyenne v_m pour *l'ensemble des images*

$x = \pm mb$, y compris $m = 0$, sera

$$v_m = \frac{-\Gamma}{2\pi L}\left\{ \text{Log}\,\frac{\text{th}\,\dfrac{\pi L}{2h}}{\dfrac{\pi L}{2h}} + (-1)^m \sum_1^\infty \text{Log}\,\frac{\text{th}\,\dfrac{\pi}{2}\left(m\dfrac{b}{h}+\dfrac{L}{h}\right)\text{th}\,\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{mb}{h}-\dfrac{L}{h}\right)}{\text{th}^2\,\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{mb}{h}} \right\}$$

$$= \frac{-\Gamma}{2\pi L}\{\varepsilon_1\}.$$

En remplaçant Γ par $C_z/2\,V_0 S/L$ et en introduisant $S_0 = bh$, les corrections $\Delta\alpha$ et ΔC_x seront

$$\Delta\alpha \simeq \frac{v_m}{V_0} = \frac{C_z S}{S_0}\,\frac{\varepsilon_1}{4\pi\left(\dfrac{L}{b}\right)^2\dfrac{b}{h}} = \frac{C_z S}{S_0}\,\varepsilon,$$

$$\Delta C_x \simeq \frac{C_z^2 S}{S_0}\,\varepsilon.$$

Voici les valeurs de E pour divers rapports L/b et b/h :

b/h….. L/b.	0,25.	0.5.	1.	2.	4.
0,5…….	−0,283	−0,144	−0,02530	+0,0750	+0,09120
0,8…….	−0,418	−0,213	−0,0772	+0,0225	+0,0453

L'étude de ces résultats montre que les corrections $\Delta\alpha$ et ΔC_x *sont nulles* pour les valeurs de b/h et de L/b données ci-dessous.

Veines rectangulaires semi-guidées comportant $\varepsilon = 0$.

b/h.	1,00.	1,04.	1,10.	1,15.	1,24.	1,36.	1,60.	2,00.	2,90.
L/b…..	0	0,20	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95

Pour les valeurs usuelles de L/b comprises entre 0,5 et 0,7 les corrections sont nulles ou négligeables en adoptant b/h compris entre 1,15 et 1,36. Les souffleries à veine rectangulaire semi-guidée par des parois horizontales disposées comme il est dit ci-dessus offrent, en outre, des commodités expérimentales appréciables.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Distributions de masses produisant le même potentiel dans une région intérieure commune.* Note [1] de M. **Pierre Dive**, présentée par M. Élie Cartan.

En 1931, nous avons donné quelques réciproques de théorèmes sur le potentiel newtonien [2]. Rappelons ces propositions :

I. Toute somme d'une forme quadratique définie négative et d'une constante positive représente le potentiel newtonien intérieur d'un ellipsoïde homogène.

II. Si le potentiel newtonien d'un corps homogène est, en tout point d'une région intérieure, égal au potentiel d'un ellipsoïde homogène, ce corps coïncide avec l'ellipsoïde.

III. Toute couche homogène, comprise entre deux surfaces fermées, homothétiques par rapport à un point intérieur (*homoïde*), est un homoïde ellipsoïdal [3].

Ces premiers résultats ont été l'origine d'autres recherches dans le même domaine, dont l'objet principal était de trouver dans quelles conditions deux répartitions de masses différentes peuvent produire le même potentiel dans une région intérieure commune.

Les parties distinctes de deux homoïdes ellipsoïdaux identiques qui se coupent nous ont fourni très simplement un système de corps possédant le même potentiel dans la région commune de leurs cavités. Mais cet exemple est encore très instructif à un autre point de vue, car il nous met en présence d'un potentiel newtonien coïncidant avec une branche de fonction harmonique multiforme dont M. Wavre a fait une étude très complète [4].

L'étude systématique des polydromies des prolongements des potentiels

---

[1] Séance du 13 novembre 1933.

[2] *Comptes rendus*, **192**, 1931, p. 1443; **193**, 1931, p. 141, et *Bulletin de la Société mathématique*, **59**, III-IV, 1931, p. 128 à 140.

[3] Sans avoir eu connaissance de nos travaux, M. Niklibore a obtenu les mêmes énoncés par une autre voie (*Math. Zeits.*, 1932, **35**, h. 5 et **36**, h. 2).

[4] P. Dive et R. Wavre, *Comptes rendus des séances Soc. Ph. et Hist. Nat. de Genève*, **49**, n° 1, 1932, p. 35; R. Wavre et P. Dive, *Comptes rendus*, **194**, 1932, p. 1901; R. Wavre, *Mathematische Zeitschrift*, **37**, h. 5, 1933, p. 739 à 748.

a encore donné à MM. Wavre et Vasilesco de très intéressants exemples [1]. Cette étude se rattache directement à la recherche des conditions requises pour que deux corps puissent posséder le même potentiel dans une région intérieure. Et, en effet, on définira une fonction harmonique multiforme nouvelle chaque fois que l'on trouvera deux répartitions équipotentiantes distinctes. Cela résulte de ce que les potentiels extérieurs respectifs sont différents, tandis que leurs prolongements sont identiques dans la région intérieure commune.

Dans une précédente Note [2], nous avons établi que deux corps ne sauraient produire le même potentiel dans une région intérieure commune, si chacun d'eux est tout entier d'un même côté du plan tangent en un point quelconque de la portion de sa surface limite intérieure à l'autre corps. Ce résultat joint à notre proposition II, rappelée ci-dessus, inclinait à penser que l'impossibilité de concevoir deux répartitions de masses *simplement connexes* distinctes, équipotentiantes dans une même région intérieure, était générale. Mais nous avons trouvé des exemples qui contredisent cette supposition.

Considérons deux homoïdes A et B, sphériques ou ellipsoïdaux, qui se coupent et possédant des potentiels constants égaux dans la région commune R de leurs cavités. Désignons par C_A la partie de la cavité de l'homoïde A extérieure à l'homoïde B, par C_B la partie de la cavité de B extérieure à A, et par Γ l'anneau commun aux deux homoïdes. Le domaine C_A est à la fois contigu à une portion de la surface intérieure de A et à une portion de la surface extérieure de B. De même C_B est contigu à la fois à une portion de la surface intérieure de B et à une portion de la surface extérieure de A. Tandis que la région R est à la fois contiguë à une portion de la surface *intérieure* de A et à une portion de la surface *intérieure* de B. Nous pouvons donc ajouter à chacun des homoïdes A et B des masses contiguës communes remplissant les cavités C_A, R, C_B.

Les potentiels des deux nouveaux corps A′ et B′ ainsi obtenus ne seront plus constants dans R, mais ils seront évidemment encore égaux.

Les corps A′ et B′ présentent chacun une seule cavité. La cavité β de A′ est la portion du volume de l'homoïde B contenue dans la cavité de A; la cavité α de B′ est la portion du volume de A contenue dans la cavité de B.

---

[1] F. Vasilesco et R. Wavre, *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 2282, et R. Wavre, *Comptes rendus des séances Soc. Ph. et Hist. Nat. de Genève*, 49, 1932, n° 3, p. 231.

[2] P. Dive, *Comptes rendus*, 195, 1932, p. 597.

Or il est facile de transformer A′ et B′ en deux nouveaux corps $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dont les volumes soient simplement connexes. Il suffit pour cela de retrancher à A′ et B′ un même fragment de l'anneau Γ commun aux deux homoïdes. Les deux cavités α et β deviennent ainsi connexes de l'espace extérieur, de telle sorte qu'il n'est pas possible de tracer à l'intérieur des nouveaux corps obtenus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ une surface fermée qui ne puisse être réduite à un point d'une façon continue.

A′ et B′ produisaient le même potentiel dans la lentille commune R; il en est donc de même des corps $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ que l'on a déduits des premiers par l'ablation d'un même fragment de matière.

Il existe donc des répartitions de masse SIMPLEMENT CONNEXES *différentes qui produisent le même champ d'attraction newtonienne dans une région intérieure commune.*

Remarque. — Dans le cas particulier où les homoïdes A et B sont des couches sphériques identiques dont la distance des centres est égale à leur épaisseur commune, les régions C_A et C_B sont nulles et chacun des deux corps équipotentiants $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ se réduit à une simple sphère dans laquelle on a pratiqué une excavation convenable.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur la capture des comètes par le système solaire.*
Note de M. **Jean Chazy**, présentée par M. Ernest Esclangon.

Schwarzschild a démontré (¹) une proposition qui peut être mise sous la forme suivante : *Si les forces se réduisent aux attractions newtoniennes entre points matériels, et si le mouvement ne comporte pas de choc, le système solaire, supposé réduit à deux points représentant le Soleil et Jupiter, ne saurait capturer une comète que temporairement.*

Comme Schwarzschild l'a annoncé, cette proposition est susceptible de différentes extensions, dans des hypothèses où l'on peut chercher à se rapprocher des conditions du mouvement réel des comètes. J'ai démontré (²) d'abord que la proposition reste valable si le troisième corps, qui arrive de l'infini au voisinage du Soleil et de Jupiter, est non plus une comète, c'est-à-dire un corps de masse nulle, mais un corps de masse quelconque.

(¹) *Astronomische Nachrichten*, **141**, 1896, p. 7.

(²) *Comptes rendus*, **179**, 1924, p. 1309.

Dans le cas du problème des n corps on peut énoncer la proposition simple suivante : *Si les distances mutuelles des n corps restent supérieures à une longueur fixe, et si les distances mutuelles de* $n-1$ *d'entre eux, formant un système* Σ, *restent inférieures aussi à une longueur fixe, ce système ne saurait capturer le* $n^{\text{ième}}$ *corps, comète ou corps de masse quelconque, supposé parti de l'infini avec une vitesse dirigée vers le système* Σ, *que temporairement.*

Bien entendu, pour augmenter l'intérêt pratique de telles propositions, il faudrait mieux connaître les conditions d'un choc ou d'une approche de deux corps ou de plusieurs corps dans le problème des n corps. Resterait-il légitime, même pour un laps de temps indéfini, de réduire les actions mutuelles du Soleil, des planètes, de la Lune à des attractions newtoniennes entre points matériels, si les distances de ces astres conservaient chacune l'ordre de grandeur actuel? La question est douteuse. Mais la même réduction ne pourrait évidemment rester valable, indépendamment des modifications des conditions de la vie sur la Terre, si certaines des distances mutuelles des astres du système solaire subissaient une diminution notable.

ASTRONOMIE STELLAIRE. — *Sur les constantes du mouvement des étoiles G, K et M.* Note de M[lles] **Renée Canavaggia** et **Marie-Louise Fribourg**, présentée par M. Ernest Esclangon.

Nous avons étudié les mouvements spatiaux des étoiles géantes de type avancé et particulièrement les variations de la vitesse d'ensemble de ces astres, dans le plan galactique, par la méthode proposée par M. Henri Mineur (¹).

Dans ce but, nous avons calculé les coordonnées galactiques x, y, z et les projections X, Y, Z de la vitesse des étoiles pour lesquelles ces calculs étaient possibles; ce travail se poursuit du reste à mesure que les publications nouvelles apportent des renseignements supplémentaires.

Nous avons jugé le moment venu de procéder à une étude préliminaire de la vitesse moyenne X, Y des étoiles situées en un point x, y du plan galactique, en utilisant la méthode des moindres carrés et en représentant,

---

(¹) *Comptes rendus*, **193**, 1931, p. 222, et *Bull. astron.*, **7**, 1932, p. 383.

en première approximation, X et Y par des fonctions linéaires de x, y,

$$X = a_0 + a_1 x + a_2 y,$$
$$Y = b_0 + b_1 x + b_2 y.$$

Voici les résultats obtenus (x, y en parsecs et X, Y en km/sec) :

Type spectral.	Nombre d'étoiles.	a_0.	$10^2 a_1$.	$10^2 a_2$.	b_0.	$10^2 b_1$.	$10^2 b_2$.
G_0–G_4.....	80	$-9,8 \pm 2,0$	$-2,3 \pm 2,1$	$+3,6 \pm 2,5$	$-2,8 \pm 1,3$	$+1,1 \pm 1,4$	$+0,6 \pm 1,6$
G_5–G_9.....	221	$-8,2 \pm 1,0$	$+1,2 \pm 1,4$	$-1,5 \pm 1,6$	$-4,1 \pm 0,7$	$+2,1 \pm 1,0$	$-3,9 \pm 1,2$
K_0–K_4.....	748	$-11,7 \pm 0,5$	$+2,1 \pm 0,8$	$0 \pm 0,7$	$-7,2 \pm 0,2$	$-0,6 \pm 0,4$	$-1,2 \pm 0,3$
K_5–K_9.....	128	$-14,0 \pm 1,5$	$-1,3 \pm 2,5$	$+5,9 \pm 2,4$	$-9,1 \pm 1,0$	$+0,1 \pm 1,5$	$-1,5 \pm 1,5$
M	247	$-14,5 \pm 0,8$	$+0,5 \pm 0,9$	$-0,3 \pm 1,0$	$-9,6 \pm 0,8$	$+1,0 \pm 0,9$	$-0,5 \pm 1,0$
Ensemble..	1524	$-11,9 \pm 0,4$	$+1,0 \pm 0,5$	$+0,2 \pm 0,5$	$-7,1 \pm 0,2$	$0 \pm 0,3$	$-1,2 \pm 0,3$

D'après ce tableau, on voit que ces étoiles présentent nettement le courant asymétrique de Strömberg, résultat favorable à l'hypothèse galactique simple.

On peut calculer les constantes classiques de Oort d'après les coefficients a_1, a_2, b_1 et b_2, sans donner les résultats partiels; voici le résultat relatif à l'ensemble des étoiles étudiées :

$$l_0 = 319^{\circ},4, \qquad 10^2 A = +1,1 \pm 0,7, \qquad 10^2 B = -0,7 \pm 0,3,$$

A et B sont exprimés en km/sec^{-1} : parsec^{-1}.

MAGNÉTISME. — *Calcul de la susceptibilité du nickel au voisinage du point de Curie.* Note [1] de M. L. NÉEL, transmise par M. Pierre Weiss.

Heisenberg a interprété le champ moléculaire de la théorie du ferromagnétisme de Weiss au moyen des actions d'échange entre atomes. Ces actions mutuelles décroissent rapidement avec la distance et les actions entre porteurs de moment voisins jouent un rôle prépondérant. Pour conserver le langage de la théorie de Weiss, tout en interprétant, en particulier, la région critique du point de Curie, il faut introduire l'hypothèse des fluctuations du champ moléculaire.

J'ai déjà montré que les courbes d'aimantation calculées dans cette hypothèse étaient analogues aux courbes expérimentales [2], mais la complica-

---

(1) Séance du 13 novembre 1933.

(2) *Ann. de Physique*, **17**, 1932, p. 5.

tion des calculs ne permettait pas de comparaisons numériques. Je vais montrer qu'un artifice de calcul simple permet de résoudre le problème d'une façon satisfaisante. J'étudierai, d'abord, les lois d'aimantation d'un groupe de N porteurs, où chaque porteur ne peut occuper que deux positions : parallèle au champ magnétique et antiparallèle. Ce modèle semi-classique ne s'applique qu'à des porteurs identiques au spin de l'électron, à condition d'appliquer certaines corrections de mécanique quantique dont je tiendrai compte ultérieurement et qui ne sont importantes qu'au voisinage de la saturation.

Je supposerai qu'il existe entre porteurs une énergie potentielle qui ne dépend que de leur orientation relative. En outre, dans la somme d'état, je prendrai comme énergie d'une complexion donnée de résultante magnétique $\vec{M}$, l'énergie moyenne de toutes les complexions de résultante $\vec{M}$. A la suite de cette simplification, l'influence des fluctuations disparaît complètement si l'on fait tendre N vers l'infini. Il est plus correct de garder à N une valeur finie, ce qui revient à remplacer les fluctuations qui, dans un groupe infini de porteurs, proviennent du nombre fini des porteurs couplés à un porteur donné, par d'autres fluctuations, analogues dans leurs effets, mais dues cette fois au nombre fini des porteurs sur lesquels porte la statistique. Les énergies potentielles introduites traduisent les actions entre porteurs voisins; elles s'expriment dans le calcul au moyen du coefficient n_1, du champ moléculaire équivalent sans fluctuations et au moyen du coefficient de fluctuation N.

Pour $N = \infty$, on a simplement un champ moléculaire de Weiss; les fluctuations sont d'autant plus accusées que N est plus petit. J'introduis, en outre, un coefficient n_2 relatif au champ moléculaire entre atomes éloignés, aux fluctuations négligeables. Finalement, deux catégories de paramètres s'introduisent dans les calculs : les uns relatifs au moment des porteurs et à leur nombre : μ et σ_0 aimantation à saturation par gramme; les autres relatifs au champ moléculaire n_1, n_2 et N. L'étude de la susceptibilité initiale du nickel dans l'état paramagnétique permet de déterminer $\sigma_0\,\mu$, n_1, n_2 et N. La courbe calculée s'accorde bien avec la courbe expérimentale de Weiss et Forrer [1], comme en témoigne le tableau, dans un intervalle où la susceptibilité varie dans le rapport de 1 à 265.

---

[1] *Ann. de Physique*, 5, 1926, p. 153.

T°K.	$\frac{1}{\chi}$ calc.	$\frac{1}{\chi}$ obs.	T°K.	$\frac{1}{\chi}$ calc.	$\frac{1}{\chi}$ obs.
919°,5	49900	50208	667°,6	4586	4572
858,2	38530	38763	656,79	3129	3134
804,6	28620	28883	650,15	2260	2273
757,23	19990	19963	643,65	1475	1491
715,17	12290	12423	640,45	1114	1132
695,84	9184	9115	637,28	783	789
677,53	6197	6172	634,14	474	468

Les valeurs déterminées des paramètres sont les suivantes :

$$\sigma_0\mu = 4,46 \times 10^5, \qquad n_1 = 120000, \qquad n_2 = 2400, \qquad N = 750.$$

Le champ moléculaire à longue distance est 50 fois plus faible que le champ moléculaire à courte distance; c'est raisonnable.

Tel quel, ce modèle ne saurait cependant suffire à interpréter les propriétés magnétiques du nickel. En effet, à basse température $\sigma_0 = 57,5$, et comme μ est égal à un magnéton de Bohr, $\sigma_0\mu$ ainsi calculé ne coïncide pas avec la valeur donnée par le paramagnétisme. Cela signifie, peut-être, que les porteurs ne sont pas dans l'état S, mais comme les calculs de fluctuations sont alors presque impossibles, je supposerai plutôt que le nombre des groupes de porteurs, au lieu d'être fixe, est variable avec l'aimantation. L'expérience montre que cette hypothèse fournit des résultats cohérents. D'une part, au-dessus du point de Curie, on représente ainsi quantitativement la variation de la susceptibilité avec le champ magnétique. D'autre part, le calcul de la chaleur spécifique du modèle fournit au point de Curie une discontinuité qui, comparée à la valeur expérimentale, montre que le nombre des porteurs qui s'orientent, dans l'état ferromagnétique, est égal à 0,54 par atome. La valeur calculée d'après la saturation est égale à 0,61. La différence entre ces deux nombres est de l'ordre des incertitudes expérimentales.

SPECTROSCOPIE. — *Sur l'absorption de la vapeur de* I_2 *en présence des gaz étrangers*. Note de M. **Ion I. Agarbiceanu**, présentée par M. A. Cotton.

Dans une Note précédente (¹), nous avons indiqué qu'un changement intervient dans l'absorption de la lumière par la vapeur de I_2 si aux molécules de celle-ci sont mélangées des molécules étrangères. Nous avons pensé que l'accroissement d'absorption qui s'ensuit pourrait faire apparaître des bandes d'absorption dont la faible intensité les rendraient, dans les conditions habituelles, inobservables. A cet effet, nous nous sommes servi d'un spectrographe à réseau du Laboratoire du Grand Électro-Aimant de Bellevue et nous avons examiné le spectre d'absorption de I_2 entre $\lambda = 4000$ et $\lambda = 6700$. Les ballons à I_2 renfermaient de l'oxygène ou de l'azote sous des pressions allant de 1^{mm} de mercure à la pression atmosphérique. Dans ces conditions les résultats sont les suivants :

1° Les bandes d'absorption existantes sont renforcées mais il n'en apparaît pas de nouvelles; 2° l'augmentation de l'absorption a lieu dans toutes les progressions v' mais c'est la progression avec $v'' = 0$ qui semble la plus affectée; 3° l'augmentation de l'absorption croît avec v' et ne paraît pas avoir atteint le maximum pour $v' = 25$ (²); 4° dans la mesure où nous avons pu suivre dans le rouge le spectre d'absorption il semble que cette augmentation commence aux environs de $v' = 6$ ou même plus bas; 5° l'oxygène est légèrement plus actif que l'azote.

Toutes ces conclusions paraissent indiquer clairement une désactivation des molécules excitées de I_2 pendant les chocs avec les molécules étrangères. Cette probabilité de choc est d'autant plus grande que la molécule de I_2 a un diamètre plus grand, donc qu'elle se trouve dans un niveau de vibration plus élevé. La vie moyenne d'une molécule dans un tel niveau diminue; il s'ensuit un élargissement des raies et un accroissement d'absorption. Il est probable que le mécanisme de cette désactivation pendant les chocs est déterminé par les champs électriques intramoléculaires très inhomogènes comme l'a montré J. H. Van Vleck (³).

La largeur spectrale des raies d'absorption est une mesure de cette

(¹) *Comptes rendus*, **195**, 1932, p. 947, et **196**, 1933, p. 38.

(²) F. W. Loomis et H. R. Fuller, *Phys. Rev.*, **39**, 1932, p. 180.

(³) *Phys. Rev.*, **40**, 1932, p. 544.

action. Avec un spectrographe à échelon, nous avons photographié le spectre de fluorescence excité par la raie 5461 d'une lampe à Hg Cooper-Hewitt. Les doublets de rotation d'une même raie sont mis en évidence dans des ordres d'interférences différents. Leur structure semble identique à celle des raies d'absorption correspondantes (sauf pour le membre $+3$), mais leur largeur spectrale est plus grande. Cette remarque semble conduire à la conclusion que la largeur spectrale d'une raie qui relie deux niveaux, dans les mêmes conditions, dépend notamment de la stabilité du niveau initial.

Ces expériences nous ont montré qu'il n'est pas possible de mettre en évidence les bandes d'absorption qui devraient expliquer normalement les raies antistokes du spectre de résonance de I_2.

Si l'on calcule l'expression $I = c\int \varphi'_{v'} \varphi''_{v''}$ à l'aide de la relation donnée par E. Hutchisson (¹) et W. G. Brown (²), on trouve que la transition $v'' = 4 \rightarrow v' = 39$ est beaucoup plus intense que le passage $v' = 39 \rightarrow v'' = 0$, qui donne naissance à la raie -4 visible de la série excitée par 5461. On devrait donc observer *a fortiori* la bande $[v'' = 4;\ v' = 39]$, ce qui n'est pas le cas.

Pourtant les graphiques des fonctions propres φ' et φ'' nous ont montré la possibilité de certaines grandes valeurs du produit $\varphi'\varphi''$ pour une même séparation nucléaire qui pourraient faciliter l'interprétation des raies antistokes. Il est probable que la relation de Hutchisson n'est pas applicable dans notre cas à cause de la déformation des courbes de potentiel qui ne permet plus, avec les hypothèses initiales sur l'oscillateur harmonique, d'avoir, pour une séparation nucléaire donnée, les vraies valeurs de φ' et φ''.

SPECTROGRAPHIE. — *Spectrographes doués d'astigmatisme pur par l'emploi de lentilles inclinées.* Note de M. A. **Couder**, présentée par M. Ch. Fabry.

Les sources ponctuelles donnent dans les instruments stigmatiques des spectres filiformes, dont l'étude est difficile. On est obligé d'*élargir* l'image que la plaque photographique doit enregistrer, et d'autant plus qu'on

(¹) *Phys. Rev.*, 36, 1930, p. 410.
(²) *Zeits. f. Phys.*, 82, 1933, p. 768.

désire éliminer plus parfaitement l'effet de la granulation de l'émulsion. Ce résultat peut être obtenu en donnant à la source ou à la plaque, pendant la durée de la pose, une translation rectiligne parallèle à l'arête du prisme. Un moyen purement optique est dans beaucoup de cas plus commode : on utilise habituellement l'*astigmatisme* produit par une lentille cylindrique. Mais l'adjonction de cette pièce, rarement satisfaisante, peut être évitée si l'on consent à modifier le montage ordinaire du spectrographe.

On considère dans cette Note le cas où l'astigmatisme est produit par l'*inclinaison des lentilles* qui entrent dans la construction de l'instrument, par rotation autour d'un axe parallèle aux arêtes du prisme, à l'exclusion de celui qu'on pourrait obtenir en donnant aux surfaces du prisme une légère courbure, ou, ce qui revient au même, en donnant une faible convergence aux faisceaux qui traversent un prisme à faces planes. L'inclinaison des lentilles offre l'avantage de donner aisément un astigmatisme pur : il suffit qu'elles satisfassent à la condition des sinus.

Disposition générale. — Hormis le cas d'une simple chambre à prisme objectif, un spectrographe comporte plusieurs systèmes de lentilles dont les longueurs focales sont f_j, et dont les axes font les angles i_j avec le rayon principal du faisceau. Ce sont, outre l'objectif de chambre, les deux éléments du système télescopique qu'on adjoint souvent à une chambre à prisme comme collecteur de lumière, ou bien l'objectif du collimateur d'un spectrographe à fente. L'objectif de chambre a pour longueur focale f_k; son axe fait l'angle i_k avec le rayon principal du faisceau correspondant à la radiation médiane du spectre étudié; pour une radiation quelconque l'angle vaut $i_k + \alpha$.

Dans le cas où tous les systèmes inclinés sont des objectifs minces, achromatiques et aplanétiques, la longueur h de la focale tangentielle, rapportée à la hauteur H du faisceau qui éclaire les prismes, s'exprime en première approximation par la relation

$$\frac{h}{\mathrm{H}} = \sum_1^k i_j^2 \frac{f_k}{f_j} + 2 i_k \alpha + \alpha^2.$$

On voit que la hauteur du spectre, considérée comme une fonction de la dispersion spectrale α, comporte un terme constant et un terme linéaire dont les coefficients sont variables au gré de l'observateur. Il suffit de faire pivoter les lentilles sur les tourillons dont on a muni leurs barillets, puis de régler les tirages. L'inclinaison des lentilles précédant le prisme produit un astigmatisme pratiquement indépendant de la longueur d'onde ; celle de

l'objectif de chambre permet au contraire de faire varier dans de larges limites la hauteur relative des deux extrémités du spectre : on peut obtenir que sa largeur ait une valeur donnée, et soit stationnaire dans une région arbitrairement choisie.

Lorsque la section des faisceaux est limitée par une ouverture rectangulaire, l'éclairement du spectre est uniforme dans sa hauteur, du moins lorsque la transparence des lentilles et du prisme n'est pas altérée par des défauts locaux.

Aberrations résiduelles. — La *courbure du champ* spectral n'est pas modifiée en première approximation.

Si le tirage du collimateur ou du collecteur télescopique est réglé de telle sorte que la nappe principale contenue dans le plan d'incidence soit composée de rayons parallèles, le prisme n'introduit pas de *coma*. Reste l'effet de la convergence de la nappe perpendiculaire au plan d'incidence; elle produit une abservation analogue à celle qu'on observe dans les spectrographes ordinaires lorsque la fente est trop longue (*gouttière*) : cet effet vient limiter la hauteur qu'on peut donner au spectre en inclinant les lentilles qui précèdent le prisme.

Applications. — Le principe indiqué ici a été mis en œuvre, dans une chambre à prisme pour l'ultraviolet construite par M. D. Chalonge. L'usage de cet instrument lui a fait trouver un intérêt pratique notable à donner au spectre une hauteur non uniforme, de manière à égaliser aproximativement le noircissement photographique dans une région étendue : l'exploration au microphotomètre des détails de structure est facilitée.

A la demande de M. J. Dufay, j'ai calculé un spectrographe sans fente dont le collecteur télescopique consiste en un miroir concave parabolique associé à une lentille divergente. Le miroir ne satisfaisant pas à la condition des sinus, ou ne peut incliner que les lentilles. D'autre part, comme la divergente (en quartz) est simple, le parallélisme des rayons de la nappe perpendiculaire aux arêtes des prismes n'est réalisé que pour une seule radiation; de ce fait, la valeur de l'astigmatisme dans l'étendue du spectre s'écarte un peu de la loi énoncée plus haut.

OPTIQUE APPLIQUÉE. — *Étude photométrique des irrégularités de densité des plaques photographiques.* Note de M. **Pierre Bricout**, présentée par M. Fabry.

Lorsque deux régions exactement juxtaposées d'une plaque photographique sont soumises simultanément à des éclairements différents, le négatif obtenu par développement ne présente pas deux plages de densité constante aussi nettement délimitées que les zones d'éclairement uniforme. On observe en réalité :

1° Deux régions de densité *moyenne* assez bien définie, mais présentant des irrégularités locales d'autant plus importantes que la surface étudiée est plus petite;

2° Une zone de transition de dimensions appréciables, dans laquelle les propriétés de la couche développée varient assez progressivement.

Les irrégularités de densité qui se produisent dans les régions soumises à un éclairement uniforme manifestent les imperfections de la plaque dans la reproduction des teintes plates; elles limitent ses applications à la microphotométrie photographique. L'existence d'une zone de transition qui, en atténuant les contrastes, rend confuse la reproduction des fins détails, limite le pouvoir séparateur de l'émulsion.

Ces défauts sont produits par deux causes principales dont l'action est toujours concomitante :

1° La structure granulaire de l'argent réduit par le révélateur sous forme de particules dont les dimensions, la forme et la répartition sont irrégulières;

2° Les propriétés optiques de la couche vierge ou développée, qui constitue un milieu trouble donnant lieu à des phénomènes de réflexion, de réfraction, de diffraction et de diffusion modifiant tant le faisceau lumineux qui impressionne la plaque que celui qui sert à l'examen du négatif.

Je me suis proposé d'étudier en premier lieu les irrégularités de densité dans les régions uniformément éclairées, en me rapprochant le plus possible des conditions normales d'emploi des plaques et en fixant avec précision les paramètres expérimentaux.

Le principe de la méthode consiste dans la comparaison photométrique des densités à l'intérieur de deux plages circulaires concentriques de diamètres très différents. Si l'on choisit la plus grande plage de manière que,

par suite des compensations statistiques, sa densité reste sensiblement constante en tout point de la plaque étudiée, on peut la prendre comme surface de référence et étudier par rapport à elle les variations de densité de la petite plage. Ainsi se trouvent éliminés les effets des variations de l'éclairage.

Le dispositif expérimental est le suivant. Un microscope de moyenne puissance vise la surface de la plaque étudiée, qui peut être déplacée à volonté dans le plan de mise au point. Celle-ci est faite de manière que l'oculaire du microscope donne du grain de la plaque une image réelle agrandie environ 150 fois et située à une quinzaine de centimètres au-dessus du cercle oculaire. Le faisceau émergent est divisé en deux parties par un cube dont un plan diagonal est semi-argenté. L'un des faisceaux partiels tombe sur une face d'un cube de Lummer après avoir traversé un coin photométrique, l'autre faisceau limité par un diaphragme réglable dont l'ouverture, placée dans le plan image, est peu supérieure aux dimensions du grain grossi, tombe sur la face symétrique du cube. Un viseur formant l'image des grains sur la pupille de l'œil permet d'observer commodément les plages photométriques.

Si l'on déplace la plaque dans le plan objet, l'image des particules d'argent réduit défile dans le plan du diaphragme. Comme la surface de celui-ci est trop petite pour que la compensation statistique des irrégularités granulaires puisse avoir lieu comme dans l'autre faisceau, on observe des variations de densité, que l'on peut mesurer à l'aide du coin photométrique. En répétant un certain nombre de mesures, on peut déterminer l'écart moyen apparent de densité ε_a correspondant à un cercle de diamètre donné (10 microns par exemple) pris sur la surface de la plage. L'étude des écarts individuels montre que ceux-ci obéissent exactement à la loi de Gauss.

Comme les erreurs photométriques dues à l'observateur suivent également cette loi et donnent lieu à une erreur moyenne ε_0, on peut déterminer l'écart moyen dû à la granulation ε_g par la formule classique

$$\varepsilon_g = \sqrt{\varepsilon_a^2 - \varepsilon_0^2}.$$

Cette grandeur dépend de la nature de l'émulsion, de la densité de la plaque et du mode de développement. Elle donne une idée exacte de la finesse de grain pratique de la couche développée; sa valeur pour un cercle du diamètre indiqué plus haut est de l'ordre de quelques centièmes. On élimine toute incertitude en choisissant le grossissement du microscope de

manière que sa latitude de mise au point soit au moins égale à l'épaisseur utile de la couche et en fixant l'ouverture numérique de son objectif. Les phénomènes de diffraction jouent en effet un rôle important dans l'observation de grains dont les dimensions sont voisines du micron; ils tendent à atténuer les contrastes et à donner à la couche une trop grande régularité apparente.

Le calcul des probabilités permet de déterminer la fluctuation relative moyenne du nombre de grains contenus dans un cercle de diamètre donné lorsqu'on fait l'hypothèse que ceux-ci sont indépendants. On peut en déduire que, dans les conditions expérimentales, l'écart moyen de densité ε_g doit varier en raison inverse du diamètre d du cercle explorateur.

Les mesures montrent que ε_g varie à peu près comme $1/d^{0,8}$. Cette réduction de la dispersion peut être attribuée soit aux phénomènes de diffraction dans le dispositif photométrique qui augmentent lorsqu'on diminue le diamètre du diaphragme, soit à une interaction des grains tendant à régulariser leur répartition. La discrimination du rôle effectif de ces deux phénomènes est difficile par suite de la complexité des effets de la diffraction produite par les grains dont la forme est extrêmement irrégulière.

RAYONNEMENT. — *Sur la technique de la mesure du rayonnement thermique de la peau.* Note de M. **Jean Saidman**, présentée par M. Ch. Fabry.

La mesure du rayonnemement thermique de la peau trouverait de nombreuses applications en médecine, si l'on pouvait la faire avec un appareillage robuste, transportable au lit du malade et muni d'un étalon commode. Jusqu'à présent, les piles thermoélectriques, généralement employées pour cette mesure avec des galvanomètres sensibles, étaient réservées à des laboratoires.

Les chiffres observés, assez souvent entachés de causes d'erreur du fait des courants de convection (même lorsque le récepteur est entouré d'une enceinte qui s'applique au contact de la peau, nous avons constaté des différences de 30 à 80 pour 100, s'ajoutant au rayonnement), ne permettaient pas de conclusions pratiques.

Choix d'une fenêtre pour la pile. — Pour éviter cette cause d'erreur, il faut adapter à la pile un écran aussi transparent que possible au rayonne-

ment de la peau. Celui-ci, calculé d'après la courbe de l'énergie du corps noir à 37°, se répartit de la façon suivante :

$\lambda(\mu)$..................	3,7	6,5	9,3	12,1	14	15	16,7	18,6	20	28	46,5
Énergie relative.........	5,6	70	100	86	71	64	51	40	34	14	2,6

Pour les petits appareils, nous employons le sel gemme en plaques de 5^{mm} d'épaisseur, à travers lesquelles on décèle 64 pour 100 du rayonnement de la main à 33°. Pour les piles de grandes dimensions, nous adoptons la cellophane en feuilles très minces (18^{μ}), qui transmettent dans les mêmes conditions 51 pour 100 de l'énergie.

Description de la pile. — Celle-ci consiste en 12 à 15 éléments de constantan soudé à un alliage nickel-chrome, en lames épaisses de 0,02 à $0^{mm},05$, amincies au voisinage de la soudure. Malgré l'absorption par la fenêtre, le courant produit par la pile à une distance de 5 à 8^{cm} de la peau est suffisant pour que la mesure soit faite avec un simple millivoltmètre que l'on peut transporter aisément.

Les soudures froides ont été modifiées de façon que l'on puisse mesurer leur température qui ne doit pas subir de modifications importantes au cours des mesures. Dans ce but, l'une des piles possède des supports de soudures froides qui plongent dans une enceinte remplie d'un liquide isolant. La température de cette enceinte peut être fixée à 0° avec de la glace fondante contenue dans une cuvette intérieure. Un thermomètre et un agitateur complètent le dispositif.

Un autre type de pile, plus simple, comporte des masses métalliques volumineuses connectées aux soudures froides qu'elles entourent complètement et percées, par ailleurs, d'une gouttière dans leur masse pour contenir le réservoir du thermomètre.

Comparaisons des mesures avec un corps noir étalon. — Pour que les mesures soient comparables, malgré les différences de température du milieu ambiant, nous substituons de temps en temps à la peau un radiateur étalon, constitué par une enceinte métallique à paroi mince, noircie à l'extérieur, et remplie d'une masse importante d'eau. On cherche quelle est la température du radiateur témoin susceptible de donner le même rayonnement thermique que la surface de la peau examinée.

On peut en déduire la température équivalente de la peau qui rayonne également comme un corps noir. Cette opinion, généralement admise par les physiciens, ne semble pas avoir été démontrée, car il est extrêmement difficile de connaître, par simple contact, la température de la peau. Le

dispositif de Benedict paraît être le meilleur pour ces mesures, mais une incertitude persiste, car la couche cornée (avec laquelle il est en contact) est une couche morte, pouvant en raison de sa minceur (10 à 30$^{\mu}$) laisser passer jusqu'à 40 pour 100 du rayonnement des couches sous-jacentes vivantes qui sont de plus en plus chaudes.

Toutefois, l'expérience suivante indique que le rayonnement total de la peau est bien celui du corps noir. On plonge une partie du corps dans un bain dont la température dépasse celui de l'organisme (par exemple, 39°,3), afin d'éviter l'erreur provenant de l'échauffement profond. On mesure son rayonnement, aussitôt après l'avoir sortie du bain et essuyée sommairement. Le chiffre obtenu est le même que celui d'un corps noir contenant de l'eau à la même température. Par ailleurs, le taux de transmission que nous avons indiqué pour le sel gemme confirme que la distribution de l'énergie dans le spectre d'émission de la peau est la même que celle du corps noir de température équivalente.

Applications pratiques. — La mesure de la température cutanée par le rayonnement paraît plus intéressante que la mesure par contact. Elle est la seule possible, lorsque l'on doit éviter le contact avec la surface explorée, comme par exemple pour les plaies opératoires. Elle permettra au chirurgien de suivre à distance et de déceler sans toucher au pansement, le début d'une infection se traduisant par une élévation de la température locale.

La comparaison du rayonnement de deux points symétriques est très utile pour déceler des troubles circulatoires ou nerveux unilatéraux : l'écart est d'autant plus élevé que l'on s'approche des extrémités. L'exploration de la pathologie des membres sera facilitée par la mesure du rayonnement.

Le dispositif décrit permet d'explorer le rayonnement d'une surface étendue, c'est-à-dire de calculer des températures moyennes, pour une région, un membre ou toute la surface du corps. Les différences individuelles sont considérables et nullement en rapport avec la température interne (rectale). L'étude de ces moyennes, notamment dans leurs rapports avec les combustions organiques, véritable « métabolisme du rayonnement », sera l'objet d'une publication ultérieure.

PHYSIQUE INDUSTRIELLE. — *Ailettes rectilignes à flux calorifique uniforme.* Note [1] de M. **Véron**, présentée par M. L. Guillet.

Dans toutes les applications où les considérations de poids priment celles de prix (chaudières marines, moteurs d'aviation refroidis par l'air), il est rationnel de donner à l'ailette une forme telle que la chaleur qui traverse son embase soit maxima pour un volume donné de métal.

M. Schmidt, de Dantzig, a montré que l'ailette qui répond à cette condition doit avoir un profil symétrique, et tel que le flux de chaleur φ_1 par unité de section parallèle à la base soit uniforme sur toute sa hauteur. Les sections droites sont alors des surfaces isothermes, dont les températures θ sont liées à la cote y au-dessus de l'embase, ainsi qu'à la conductibilité λ du métal et au flux de chaleur φ_1, par une relation évidente qui s'écrit (si $T > \theta_0$) :

$$\varphi_1 = \lambda \frac{\theta - \theta_0}{y}, \quad \text{d'où :} \quad \theta = \theta_0 + \frac{\varphi_1}{\lambda} y, \quad \text{et} \quad \theta_h = \theta_0 + \frac{\varphi_1}{\lambda} h \text{ au sommet.}$$

Pour h et λ donnés, le maximum de φ_1 répond au maximum de θ_h; et le maximum de θ_h pour toutes les ailettes est T. Si $T < \theta_0$, le maximum de φ_1 répond au minimum de θ_h, c'est-à-dire encore à T. Donc le flux maximum est toujours, au signe près :

$$\Phi_1 = \lambda / h (T - \theta_0).$$

Il est intéressant de rechercher le profil exact des ailettes à flux φ_1 constant, et en particulier celui de l'ailette engendrant le flux $\Phi_1(h)$ maximum.

Écrivons qu'en régime l'accroissement de la chaleur qui passe d'une face à l'autre d'une tranche transversale $(2x, dy)$, est égal à l'apport de chaleur par convection et rayonnement (coefficient k) sur les deux éléments de surface latérale interceptés ds. On obtient l'équation différentielle :

$$2\varphi_1\, dx = -2k(T - \theta)\, ds = -2k\left(T - \theta_0 - \frac{\varphi_1}{\lambda} y\right)\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

qui met en compte le fait que $d(\varphi_1 x)/dy$ est de signe contraire à $T - \theta$.

L'intégration, justiciable de l'analyse élémentaire, donne :

$$(x - K)^2 + (K' - y)^2 = \frac{\lambda^2}{k^2},$$

---

(1) Séance du 13 novembre 1933.

avec

$$K = \frac{\lambda}{\varphi_1}\sqrt{\frac{\varphi_1^2}{k^2} - \left(T - \theta_0 - \frac{\varphi_1}{\lambda}h\right)^2} + x_h, \qquad \text{et} \qquad K' = \frac{\lambda}{\varphi_1}(T - \theta_0).$$

L'ailette à flux constant est donc formée de deux arcs de cercle symétriques, dont les centres ont pour coordonnées $x = \pm K$ et $y = K'$, et dont les rayons sont égaux à λ/k.

Il n'y a qu'une solution pour chaque groupe de valeurs de h et de φ_1 : une valeur de φ_1 entraîne un profil et un seul de hauteur fixée. Pour que cette solution soit réelle, il faut que soient réalisées deux conditions :

1° Le profil doit couper l'embase de l'ailette :

$$K' \leqq R, \qquad \frac{\lambda}{\varphi_1}(T - \theta_0) \leqq \frac{\lambda}{k}, \qquad \varphi_1 \geqq k(T - \theta)_0 = \varphi_0.$$

C'est dire que le flux dans l'ailette doit dépasser le flux à travers l'embase nue, supposée à la température θ_0.

2° Le flux φ_1 doit être inférieur au maximum réalisable ($\theta_h \leqq T$) :

$$\varphi_1 \leqq \Phi_1 = \frac{\lambda}{h}(T - \theta_0).$$

Ces limites ne sont compatibles que si $k \leqq \lambda/h$. Cette condition est toujours satisfaite avec les ailettes métalliques.

Mais il reste que pour être réalisable, le flux φ_1 doit être compris entre les limites indiquées, ce qui exclut en particulier toute ailette comportant un méplat au sommet. En effet, le flux uniforme à considérer est alors le flux qui traverse le méplat et le mur sous-tendu :

$$\varphi_{1h} - \frac{(T - \theta_0)}{\frac{1}{k} + \frac{h}{\lambda}} < \varphi_0 = \frac{T - \theta_0}{\frac{1}{k}}.$$

Il sort donc de la limite inférieure de possibilité de l'ailette.

Ainsi, une ailette à flux constant ne comporte pas de méplat à son sommet; elle est aiguë ($x_h = 0$).

En remplaçant φ_1 par Φ_1 dans l'équation du profil à flux constant, on a :

$$\left(x - \frac{\lambda}{k}\right)^2 + (h - y)^2 = \frac{\lambda^2}{k^2}.$$

L'ailette optimorum est donc formée de deux arcs de cercle symétriques accolés tangentiellement à la pointe de l'ailette.

Si sa hauteur (ou son embase) n'est pas fixée, son flux $\Phi_1(h)$ est le plus grand quand elle est aussi courte, donc aussi mince, que possible.

En introduisant dans l'équation différentielle l'hypothèse $ds = dy$, c'est-à-dire en assimilant le flanc de l'ailette à un plan offrant la même distribution de température M. Schmidt avait obtenu comme équation des ailettes à flux constant sans méplat :

$$a = \frac{k}{\lambda}(y^2 - h^2) - \frac{2k}{\varphi_1}(T - \theta_0)(y - h).$$

L'ailette à flux constant lui apparaissait donc comme formée de deux arcs de parabole, accolés tangentiellement pour l'ailette optimorum.

L'existence réelle des ailettes ainsi définies n'était soumise à aucune condition de limite inférieure pour φ_1.

Enfin, si φ_1 n'était pas imposé, il existerait un profil parabolique (fictif) réalisant le flux particulier φ_{1h} du méplat et formant avec lui une ailette à méplat de flux constant. Son demi-angle au sommet, fixé par la condition $ds = dy = \mp dx$ à l'arête, serait évidemment de 45°. Son flux φ_{1h} serait inférieur au flux φ_0 à travers le métal nu, et très inférieur au flux Φ_1 à travers l'ailette optimorum : par exemple, φ_{1h}/Φ_1 est égal à 1/151 pour une convection lente ($k = 10$) sur ailettes courtes ($h = 0,10$) en alpax ($\lambda = 150$).

Son inverse, Φ_1/φ_{1h}, est le rapport, considérable comme on voit, dans lequel on multiplie le flux de chaleur transmis, quand on découpe dans une paroi massive de hauteur h une ailette optimorum de même hauteur.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Système : sulfate de cadmium, acide sulfurique, eau.* Note [1] de M. **René Arditti**, présentée par M. H. Le Chatelier.

J'ai étudié le système ternaire sulfate de cadmium-acide sulfurique-eau, en mesurant la teneur en sulfate de cadmium dissous et différentes propriétés physiques de solutions à taux d'acide sulfurique croissant.

Pour des taux d'acide nuls, les chiffres que j'ai obtenus concernant la solubilité dans l'eau du sulfate de cadmium, en contradiction complète avec ceux d'Étard [2], concordent parfaitement avec ceux de Mylius et Funk [3].

Les solutions saturées, où les trois composants sont effectivement présents, ont été obtenues soit en versant de l'acide sulfurique dans une solu-

(1) Séance du 13 novembre 1933.

(2) Etard, *Ann. Chim. Phys.*, 7-2, 1894, p. 552.

(3) Mylius et Funk, *Berichte d. chem. Ges.*, 70, 1897, p. 825.

tion aqueuse saturée de sulfate de cadmium, soit en dissolvant du sulfate de cadmium — anhydre ou hydraté à 8/3 de molécules d'eau de cristallisation — dans des mixtes d'acide sulfurique et d'eau. Les états d'équilibre auxquels je suis parvenu sont indépendants du mode de préparation des solutions. La constance des résultats à une même température, à plusieurs mois d'intervalle, a permis de vérifier l'obtention de l'équilibre.

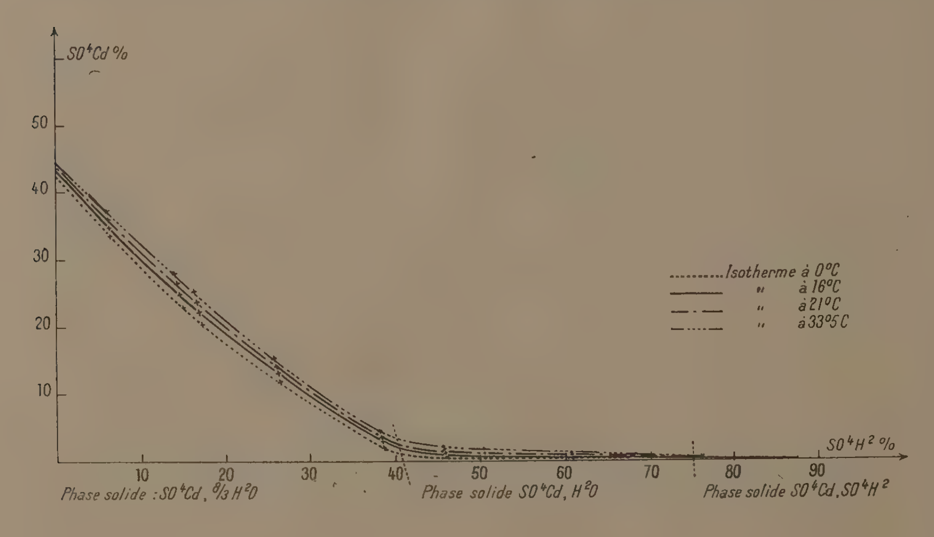


Fig. 1.

Notons toutefois qu'en versant de l'acide dans la solution aqueuse saturée de sulfate de cadmium, le sel qui précipite en premier lieu est toujours de sulfate monohydraté SO^4Cd, H^2O. Ce sel est stable pour des concentrations en acide sulfurique convenables, comprises entre deux limites, variables avec la température. Pour des concentrations en acide inférieures à la plus petite de ces limites, le monohydrate se transforme lentement en $SO^4Cd, 8/3\,H^2O$. Pour des concentrations supérieures à la plus grande de ces limites, le monohydrate se transforme lentement en sulfate acide SO^4Cd, SO^4H^2.

La figure 1 donne les solubilités à 0°, 16°, 21° et 35°,5. On a porté en abscisses la masse en grammes d'acide sulfurique libre, en ordonnées la masse en grammes de sulfate de cadmium, rapportées toutes deux à la même masse de solution (100^g). La teneur en acide sulfurique libre a été déterminée par gravimétrie et par volumétrie; les résultats ont été concordants. Le sulfate de cadmium dissous a été dosé par évaporation et calcination.

La figure 2 rassemble les résultats de mesures physiques effectuées à 21° sur la phase liquide saturée, en équilibre avec la phase solide : densités, indices de réfraction (pour la raie jaune du sodium), viscosités (mesurées à l'appareil Baume), conductibilités électriques (mesurées selon une méthode préconisée par M. Le Chatelier) (¹). Les ordonnées représentent

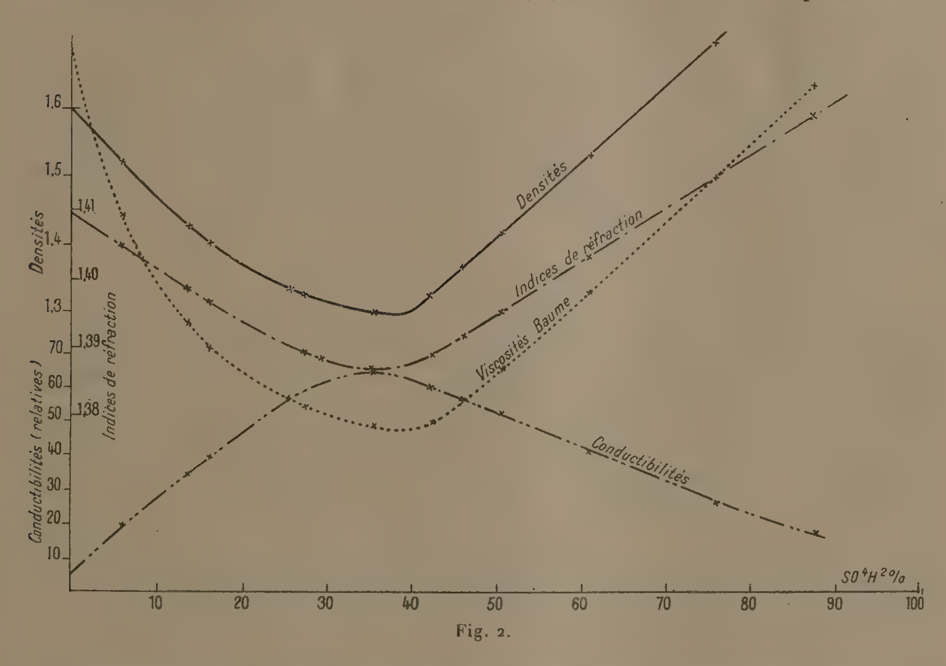


Fig. 2.

les divers chiffres obtenus, les abscisses ayant même signification que dans la figure 1.

Comme on le voit sur le graphique, ces courbes présentent soit un maximum, soit un minimum, parfaitement accusés, pour une abscisse qui est celle du point de transition entre les deux hydrates SO^4Cd, $8/3\,H^2O$ et SO^4Cd, H^2O. Elles ne présentent par contre aucune particularité à l'abscisse du point de transition entre le monohydrate et le bisulfate de cadmium.

(¹) Dubrisay, *Thèse de Doctorat*, Paris, 1910.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur le potentiel d'oxydo-réduction du système hypoxanthine ⇌ acide urique.* Note de Mlle **Sabine Filitti**, présentée par M. G. Urbain.

On sait que les conditions d'équilibre de l'oxydation de l'acide succinique en acide fumarique (1) et de l'acide lactique en acide pyruvique (2), ont été déterminées par la méthode électrométrique en présence de catalyseurs diastasiques et de corps électroactifs convenables. J'ai pu de la même manière mesurer le potentiel d'oxydo-réduction du système hypoxanthine ⇌ acide urique :

$$C^5H^4ON^4 + 2H^2O \rightleftharpoons C^5H^4O^3N^4 + 2H^2.$$

L'hypoxanthine en présence de la xanthine-oxydase préparée par la méthode de Dixon et Kodama (3) réduit toute la série des indicateurs d'oxydo-réduction y compris le chlorure de diméthyl-γ'-dipyridile de Michaelis (4). Ce colorant dont le potentiel normal a comme valeur, à 30°, —0,0440 volt par rapport à l'électrode normale d'hydrogène est le seul qui puisse être utilisé comme corps électroactif. Encore ne peut-il l'être que dans un domaine étroit d'activité des ions H^+ correspondant à pH = 7 environ. En dehors de ces limites, le potentiel normal de cet indicateur s'écarte trop de celui du système hypoxanthine ⇌ acide urique.

J'ai mis en évidence l'équilibre entre l'hypoxanthine et l'acide urique de la manière suivante :

1° J'ai suivi l'évolution du potentiel dans un mélange contenant la déshydrase, le colorant et un mélange équimoléculaire d'hypoxanthine et d'acide urique.

2° J'ai ajouté à un mélange d'hypoxanthine, de diastase et de colorant qui a atteint son équilibre, une quantité déterminée d'acide urique, telle que le rapport hypoxanthine/acide urique soit égal à l'unité.

---

(1) J. H. Quastel, *Biochim. Journ.*, 18, 1924, p. 519; T. Thunberg, *Skand. Archiv. Physiol.*, 46, 1925, p. 339.

(2) R. Wurmser et N. Mayer, *Journ. Chim. phys.*, 30, 1933, p. 249; J. P. Baumberger, J. J. Jürgensen et K. Bardwell, *Jour. of. Gen. Physiol.*, 16, 1933, p. 961

(3) Dixon et Kodama, *Biochem, Journ.*, 20, 1924, p. 1104.

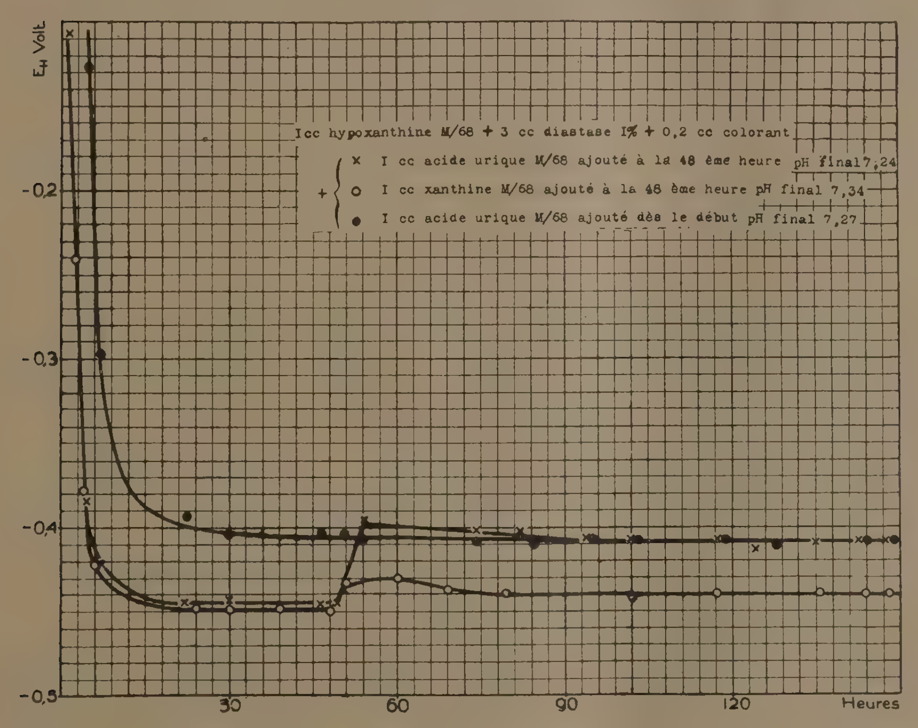
(4) L. Michaelis, *Biochem. Zeitsch.*, 250, 1932, I-VI, p. 564.

Dans ces deux cas, ainsi que le montre la figure, le potentiel finit par atteindre une même valeur $E_H = -0,410$ volt.

3° Tandis que l'hypoxanthine réduit le chlorure de diméthyl-γγ'-dipyridile, l'acide urique oxyde le leuco-dérivé de ce même colorant.

Les résultats ainsi obtenus permettent de calculer le potentiel normal du système.

Les quatre hydrogènes intervenant dans la réaction sont échangés au



même niveau d'énergie, car l'hypoxanthine réduit des quantités équivalentes de tous les indicateurs jusqu'au chlorure de diméthyl-γγ'-dipyridile. On peut alors, en négligeant la dissociation et les coefficients d'activité de l'hypoxanthine et de l'acide urique, exprimer le potentiel du système par la relation

$$E_H = E_0 - \frac{RT}{4\mathcal{F}} \frac{1}{0,4343} \log \frac{(\text{hypoxanthine})}{(\text{acide urique})} - \frac{RT}{\mathcal{F}} \frac{1}{0,4343} \text{pH},$$

où E_0 est le potentiel normal, et où les termes entre parenthèses représentent les concentrations des corps réagissants.

La moyenne de treize déterminations à 38° C. est

$$E_0 = +0,031 \text{ volt} \pm 0,002,$$

ce qui correspond, pour l'énergie libre de la réaction, à

$$\Delta F = 4\mathcal{F} E_0 = +2861^{\text{cal}} \pm 180^{\text{cal}}.$$

D'après les données de Berthelot la chaleur de réaction à pression constante est

$$\Delta H = -1700^{\text{cal}}.$$

CHIMIE PHYSIQUE. — *Influence de la force des bases sur la formation des complexes aluminotartriques.* Note de M. **Pariselle**, présentée par M. Jean Perrin.

Dans un travail précédent (1), j'ai montré que l'acide tartrique donnait avec les sels d'aluminium et la soude un complexe $C^4H^3O^6(AlO)Na^2$ ou $[2C^4H^6O^6, Al^2O^3]Na^4$ et que cet émétique présentait manifestement une stabilité maximum pour un pH voisin de 10, un excès de soude le détruisant instantanément.

Il n'existe donc pas, pour l'aluminium, de composés stables en milieu fortement basique, analogues à ceux signalés par Grossmann (2) dans le cas de l'antimoine.

Il m'a paru intéressant d'étudier l'influence de la force de la base dans la formation des complexes aluminotartriques.

Tandis que la potasse donne des résultats identiques à ceux obtenus avec la soude, l'ammoniaque, base moins dissociée, se conduit différemment. L'acide aluminotartrique $C^4H^5O^6(AlO)$ se forme encore, comme dans le cas des bases fortes, et donne lieu au même phénomène de mutarotation, mais l'émétique diammonique ne se produit qu'incomplètement et il faut atteindre de fortes concentrations en ammoniaque pour que la solution présente une rotation comparable à celle observée avec les bases fortes; sa zone d'instabilité ($pH > 10$) n'étant pas atteinte, il n'y a plus de chute brusque de la rotation.

(1) *Comptes rendus*, 185, 1927, p. 130.
(2) *Z. physik. Chem.*, 57, 1906, p. 533.

Ainsi à une température de 13° et pour une concentration de 2/10000 mol/cm³ en acide tartrique, le pouvoir rotatoire moléculaire [1], pour la raie jaune du mercure, atteint la valeur de 13°,11 lorsque la concentration en ammoniaque est de 24/10000.

En remplaçant, dans les diverses expériences, l'ammoniaque par la *pipéridine*, base de force comparable, on obtient des résultats très voisins.

Le tableau suivant correspond à des mesures effectuées à 12°, avec des solutions renfermant pour un volume total de 40$^{cm^3}$, 5$^{cm^3}$ de solution monomoléculaire d'acide, 5$^{cm^3}$ de solution demi-moléculaire de sulfate d'aluminium et des doses croissantes de pipéridine :

Solution normale de pipéridine.	Pouvoir rotatoire moléculaire instantané.	Pouvoir rotatoire après mutarotation.
0	2°,48	—
15	9,40 (max.)	4,10
20	4,50 (min.)	7,50
25	12,90	
30	13,40	—

J'ai enfin étudié l'action des bases pyridiques, beaucoup plus faibles que les précédentes. Là, les phénomènes sont nettement différents, on n'observe pas en particulier la formation du complexe bibasique dont la zone de stabilité ne peut plus être atteinte. Par contre, un nouveau phénomène intervient pour des fortes proportions de bases, la rotation prend des valeurs négatives et ce résultat semble devoir être attribué à ces bases jouant le rôle de solvant ainsi que le montre l'étude polarimétrique des sartiates de pyridine et de quinoléine faite antérieurement [2].

Les résultats suivants sont relatifs à des solutions renfermant, pour un volume total de 40$^{cm^3}$, 10$^{cm^3}$ d'acide tartrique, 10$^{cm^3}$ de sulfate d'aluminium et un volume croissant d'une solution tétranormale de pyridine.

Pyridine 4 N.	$[\alpha]_M$ à 12° (raie verte).	$[\alpha]_M$ après mutarotation.
0	2°,35	
7,5	6,15 (Max.)	2°,56
20	1,84	croît
20 (pyridine pure)	—3,85	

---

(1) $[\alpha]_n = \alpha v/la$, v étant le volume total de la solution et a le volume de la solution monomoléculaire d'acide tartrique et de la solution demi-moléculaire de sulfate d'aluminium employées.

(2) PARISELLE, *Comptes rendus*, **183**, 1926, p. 210.

Le pouvoir rotatoire des solutions varie beaucoup avec la température et avec la concentration, surtout pour celle qui correspond au maximum, c'est-à-dire à l'acide aluminotartrique.

Dans le cas de la quinoléine, on observe encore un maximum de 5°,35, correspondant à 3^{mol} de base pour union Al; puis le pouvoir rotatoire décroît très vite et atteint — 6° pour le mélange correspondant à 5^{mol} de quinoléine.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur l'énergie de dissociation de l'eau par vibrations symétriques et sur les produits de cette dissociation.* Note de M. **Michel Magat**, présentée par M. Jean Perrin.

La détermination très exacte des fréquences de vibration de la molécule H^2O par Mecke et ses collaborateurs (1) permet de calculer la chaleur de dissociation de H^2O en 2H et O. Mecke représente les fréquences de vibration par

$$(1) \qquad \nu = v_\pi \omega_\sigma + v_\pi \omega_\pi + v_\delta \omega_\delta \quad (\text{cm}^{-1}),$$

où v_σ, v_π, v_δ sont des nombres entiers indiquant l'ordre des harmoniques des fréquences normales ω_σ, ω_π, ω_δ, dont la combinaison produit la fréquence ν. π, σ et δ désignent respectivement les modes de vibration symétriques (↙·↘), antisymétriques (↗·↘) et de déformation (cisaillement) (→·←). D'après Mecke, on aurait

$$\omega_\sigma = 3795 - 39(v_\sigma + v_\pi), \qquad \omega_\pi = 3670 - 70(v_\sigma + v_\pi),$$
$$\omega_\delta = 1615 - 20(v_\sigma + v_\pi + v_\delta).$$

Il nous semble que Mecke fait, sur la liaison d'anharmonicité entre les trois modes de vibration fondamentaux, des hypothèses trop particulières. D'après Born et Brody (2), la forme des fréquences *normales* d'un système d'oscillateurs couplés anharmoniques s'écrit

$$(2) \qquad \omega_i = \omega_i^0 + a_{ii} v_i + \sum_k a_{ik} v_k \qquad (i,\ k = \sigma,\ \pi,\ \delta)$$

avec $a_{ik} = a_{ki}$.

Il faudrait des circonstances toutes particulières et fort improbables pour que l'on ait $a_{ii} = a_{iu}$.

Nous avons essayé de déterminer les constantes des équations (2) de manière à représenter le plus exactement possible les fréquences ν obser-

(1) Mecke, *Zeits. f. Physik*, 81, 1933, p. 313; Baumann et Mecke, *Zeits. f. Physik*, 81, 1933, p. 445; Freundenberg et Mecke, *Zeits. f. Physik*, 81, 1933, p. 465.

(2) Born et Brody, *Zeitschrift f. Physik*, 6, 1921, p. 140.

vées. Les valeurs ainsi calculées sont portées dans la troisième ligne du tableau suivant, dont la première donne les trois nombres entiers v de la formule (1), et la seconde les valeurs observées. La quatrième ligne donne la différence entre les valeurs observées et les valeurs calculées. La cinquième contient les fréquences calculées d'après les formules de Mecke et la sixième leurs écarts avec l'expérience. Nous avons posé

$$\omega_\sigma = 3795 - 40 v_\sigma - 50 v_\pi - 10 v_\delta; \qquad \omega_\pi = 3670 - 71 v_\pi - 50 v_\sigma - 10 v_\delta,$$
$$\omega_\delta = 1615 - 19,5 v_\delta - 10 v_\pi - 10 v_\sigma.$$

V_σ, V_π, V_δ.	$\nu_{obs.}$	$\nu_{calc.}$	$\Delta\nu_{calc.-obs.}$	$\nu_{calc.}$ Mecke.	$\Delta\nu_{calc.-obs.}$ Mecke.
0, 0, 1..........	1595,4	1595,5	±0	1595	+0,5
0, 0, 2..........	3152	3151	−1	3150	− 2
1, 0, 0..........	3756	3755	−1,3	3756	± 0
1, 0, 1..........	5332	5330,5	−1,8	5331	− 1
1, 1, 0..........	7253	7254	+1	7247	− 6
1, 1, 1..........	8807	8809,5	+2,5	8802	− 5
1, 2, 0..........	10613	10612	−1	10598	−15
3, 0, 0..........	11032	11025	−7	11034	+ 2
1, 2, 1..........	12151	12147	−4	12133	−18
3, 0, 1..........	12565	12560,5	−4,5	12569	+ 4
1, 3, 0..........	13831	13826	−5	13809	−23
3, 1, 0..........	14319	14324	+5	14307	−12
1, 3, 1..........	15348	15340,5	−7,5	15324	−24
3, 1, 1..........	15833	15839	+6	15822	−11
1, 3, 2..........	16821	16817	−4	16799	−22
1, 4, 0..........	16898	16892	+1	16880	−18
3, 2, 0..........	17465	17493	−2	17445	−50

Ces données permettent de calculer l'énergie de dissociation de H^2O par vibration symétrique, d'après la formule de Birge et Sponer, $D = hc\omega_\pi^0/4x^0$, où $x_0 = a_{\pi\pi}/2\omega_\pi^0$.

On obtient ainsi 269 ± 3 kcal. (La vibration antisymétrique donne naturellement une valeur plus élevée.)

D'autre part on peut calculer indirectement la chaleur de dissociation à l'aide de données thermiques et spectroscopiques :

$$H^2O = H^2 + \tfrac{1}{2}O^2 - 57,1\,\text{kcal} \pm 0,1,$$
$$H^2 = 2H \quad - 101,9\,\text{kcal} \pm 0,7 \quad (^1),$$
$$\tfrac{1}{2}O^2 = O \quad 58,2\,\text{kcal} \pm 0,2 \quad (^2).$$

D'où

$$H^2O = 2H + O - 218 \quad \text{kcal} \pm 1.$$

Il reste donc entre les valeurs de D un écart de 51 ± 3 kcal. Il se trouve

(1) R. Birge, *Proc. National Acad.*, **14**, 1928, p. 12.

(2) Herzberg, *Zeits. f. Physik. Chemie*, **13**, 1930, p. 189.

que cette différence correspond assez exactement à l'énergie d'activation de l'atome d'oxygène (passage de l'état normal ^3P au premier niveau excité ^1D) :

$$O_{(^3P)} + 45{,}2\,\text{kcal} = O_{(^1D)} \quad (^1).$$

Ce résultat nous conduit à considérer que le produits primaires de dissociation thermique de H^2O sont non pas les atomes normaux 2H et O, mais que l'oxygène est activé de façon qu'on obtient 2H et $O_{(^1D)}$, ce que vérifie une hypothèse faite par Haber et Bonhoeffer en 1928 (2).

Un mécanisme analogue avait été admis par Mecke pour interpréter la décomposition chimique de l'eau par l'ultraviolet extrême (3).

La dissociation de $\overset{+}{N}{}^2$ et CN conduit également à des atomes excités (4) et (5).

Il faut peut-être rapprocher ce mécanisme de dissociation des faits observés par Haber et ses collaborateurs (6) : les atomes d'oxygène ne réagissent sur l'oxygène moléculaire que s'ils sont préalablement chauffés à 700°K. environ, température où le nombre d'atomes d'oxygène activés commence à devenir notable.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur l'ascension capillaire des hydrosols et des solutions de matières colorantes. Influence de la concentration et des électrolytes.* Note (7) de MM. **Augustin Boutaric** et **Marius Peyraud**, présentée par M. Matignon.

1. Bien que l'ascension des matières colorantes et des colloïdes dans les subtances poreuses, et notamment dans les bandelettes de papier filtre, ait

---

(1) Frerichs, *Phys. Rev.*, 36, 1930, p. 39.

(2) Bonhoeffer et Haber, *Zeits. Physik. Chemie*, A, 137, 1928, p. 263.

(3) Mecke, *Trans. Faraday Soc.*, 27, 1931, p. 359; Goodeve and Stein, *Trans. Faraday Soc.*, 27, 1931, p. 393.

(4) G. Herzberg, *Ann. der Physik*, 86, 1928, p. 189.

(5) G. Herzberg, *Zeits. f. Physik*, 52, 1929, p. 815.

(6) Haber, *Naturwissenschaften*, 18, 1930, p. 917; Goldmann, *Zeits. f. Physik, Chemie*, B. 5, 1929, p. 316; Farkas, Haber und Harteck, *Zeits. f. Electrochemie*, 36, 1930, p. 711; Farkas, Goldfinger et Haber, *Naturwissenschaften*, 17, 1929, p. 674.

(7) Séance du 13 novembre 1933.

déjà fait l'objet d'un nombre considérable de recherches ([1]), il nous a paru que certains points du phénomène méritaient encore d'être précisés

Nos expériences ont porté sur des hydrosols colloïdaux de synthèse et des solutions de matières colorantes : les unes colloïdales, c'est-à-dire ne dyalisant pas, présentant nettement le phénomène de l'électrophorèse et floculant sous l'influence des électrolytes; les autres semi-colloïdales, c'est-à-dire ne présentant qu'imparfaitement les propriétés précédentes.

Des bandelettes de papier filtre sans cendre (Durieux) étant disposées verticalement de manière que l'extrémité inférieure plonge dans la solution à étudier, le papier se mouille d'abord par l'eau de la solution avec une vitesse qui ne semble pas dépendre de la substance dissoute ; celle-ci s'élève ensuite avec une vitesse moindre.

La vitesse d'ascension dépend beaucoup de l'état hygrométrique de l'atmosphère ambiante ; elle croît rapidement lorsque l'état hygrométrique diminue. Pour obtenir des résultats comparables, il nous a paru nécessaire d'effectuer les mesures dans une atmosphère saturée d'humidité. Dans ces conditions, la vitesse d'ascension, pour une solution donnée, croît rapidement et régulièrement avec la température. Pour des mesures comparatives, il est indispensable d'opérer à une température invariable.

2. En ce qui concerne l'influence qu'exerce la concentration de la solution sur la vitesse de l'ascension capillaire, les résultats obtenus sont nettement différents suivant le signe du granule ou de l'ion colorant.

Pour les substances dont le granule ou l'ion colorant est électronégatif, la vitesse d'ascension est très sensiblement indépendante de la concentration. Pour les substances dont le granule ou l'ion colorant est électropositif, la vitesse d'ascension, très faible pour les solutions les plus diluées, croît au contraire d'une manière sensiblement linéaire avec la concentration.

On a souvent préconisé l'ascension capillaire comme moyen permettant de reconnaître le signe des granules ou des ions colorants. Les résultats que nous venons de signaler montrent que l'emploi d'une telle méthode nécessite quelques précautions. Pour de faibles concentrations de l'ordre de $0^{g},1$ par litre, les matières colorantes électronégatives ont une vitesse

---

(1) Parmi les publications les plus récentes, citons celles de Ph. Lasseur, A. Dupaix-Lasseur et J.-G. Marchal, *Analyse capillaire. Travaux du Laboratoire de Microbiologie de la Faculté de Pharmacie de Nancy.* Fasc. VI, 1933, p. 36.

d'ascension toujours très nettement supérieure à celle des matières colorantes électropositives; mais, sous des concentrations beaucoup plus considérables, de l'ordre de 1 à 2^g par litre, les différences entre les vitesses d'ascension s'atténuent et peuvent même s'inverser.

3. L'addition d'une faible quantité d'électrolyte à un hydrosol ou à la solution d'une matière colorante colloïdale exerce sur la vitesse d'ascension capillaire une influence qui est également différente suivant le signe du granule colloïdal.

Ayant préparé un hydrosol ou une solution de matière colorante d'une concentration de 1^g par litre, nous l'avons dilué à volumes égaux, soit avec de l'eau distillée, soit avec la solution électrolytique dont nous nous proposions d'examiner l'influence. Pour comparer les influences respectives des cations et des anions, nous avons, dans tous les cas, envisagé l'action : 1° d'électrolytes ayant même anion et des cations différents : ClH, $ClNa$, Cl^2Ba, Cl^3Al, Cl^4Th; 2° d'électrolytes ayant même cation et des anions différents : $NaOH$, $NaCl$, Na^2SO^4, Na^3PO^4.

a. Sur les solutions de colloïdes négatifs ou de matières colorantes colloïdales négatives, l'addition d'électrolyte exerce toujours un effet retardateur. Pour un même cation, cet effet ne semble pas dépendre de la nature de l'anion. Pour un même anion, il croît très nettement avec la valence du cation.

b. Sur les solutions de colloïdes positifs ou de matières colorantes colloïdales et semi-colloïdales positives, l'addition d'électrolyte peut entraîner, suivant les cas, une accélération ou un ralentissement de l'ascension.

L'addition de $ClNa$ ne détermine qu'une accélération très faible de la vitesse d'ascension. Celle de ClH, de Cl^2Ba, de Cl^3Al, de Cl^4Th, exerce une influence accélératrice d'autant plus nette que la valence du cation est plus élevée, influence qui croît d'abord avec la concentration de l'électrolyte, passe par un optimum, décroît ensuite et change de sens, la vitessse d'ascension s'annulant lorsque la concentration est suffisante pour provoquer la floculation du colloïde.

L'addition de SO^4Na^2 ou de PO^4Na^3 entraîne, au contraire, dès le début, une diminution de la vitesse d'ascension d'autant plus importante que la valence de l'anion est plus élevée et que la concentration de l'électrolyte est plus forte, l'ascension devenant nulle pour la valeur de cette concentration qui provoque la floculation.

EFFET RAMAN. — *L'effet Raman des solutions de nitrate d'ammonium dans l'acide nitrique.* Note de M. **Louis Médard** et M[lle] **Thérèse Petitpas**, présentée par M. Ch. Fabry.

Une solution de 38,7 de nitrate d'ammonium dans 61,3 d'acide nitrique anhydre (qnantités dans le rapport de NO^3NH^4 à $2NO^3H$) a donné le spectre de raies Raman suivant :

Raies Raman. λ en Å dans l'air.	Raies Raman. Nombre d'ondes par cm.	Raies excitatrices de l'arc à mercure. Nombre d'ondes par cm.	Fréquences caractéristiques en cm^{-1}.	Intensité et aspect.
4153,3	24077,2	24712,5	635	Moyenne
4162,6	24023,4	»	688	Moyenne
4169,4	23984,3	»	728	Très faible
4226,6	23659,7	»	1052	Forte, étroite
4261,1	23468,4	24520	1051	Moyenne, étroite
4275,0	23391,8	24712,5	1321	Moyenne
4278,1	23374,9	»	1338	Moyenne
4282,7	22308,0	22944,5	636	Moyenne
4493,2	22255,9	»	689	Moyenne
4501,2	22216,3	»	728	Faible
4547,5	21990,1	»	954	Moyenne
4568,4	21889,5	»	1055	Forte, étroite
4623,9	21626,8	»	1318	Assez forte, large
4627,5	21609,9	»	1335	Assez forte
4703,2	21262,1	»	1682	Moyenne

Des spectres de solutions s'échelonnant depuis NO^3H pur jusqu'à la solution nitrique saturée en NO^3H^4 ont été pris; les raies Raman varient comme suit en fréquence et en intensité :

NO^3NH^4 pour 100 de solution.	9,9.	15,7.	22,7.	38,7.	46.	55.
n_1....	610 (m)	614 (m)	634 (m)	636 (m)	640 (m)	644 (f)
n_2....	660 (aF)	682 (m)	686 (m)	688 (m)	690 (m)	690 (m)
n'_1..	–	–	728 (tf)	728 (f)	728 (f)	728 (m)
n_3....	936 (aF)	940 (m)	945 (m)	954 (m)	957 (m)	956 (f)
$n_4 n'_2$..	1053 (m)	1055 (m)	1055 (aF)	1053 (F)	1053 (TF)	1053 (TF).
n_5....	1305 (TF)	1306 (TF)	1312 (F)	1320 (aF)	1320 (m)	
n'_3..	–	–		1336 (aF)	1332 (aF)	1339 (aF)
n_7....	1540 (f)					
n_8....	1683 (aF)	1685 (aF)	1683 (m)	1682 (m)	1682 (m)	1682 (f)

En outre, nous avons trouvé dans les trois mélanges les plus riches en NO^3NH^4 une bande d'intensité moyenne, de structure paraissant simple, large d'environ 200 cm^{-1}, avec maximum à 3200 cm^{-1}; on l'obtient, bien isolée, en excitant par la lumière de l'arc à Hg filtrée au moyen d'une solution de $CoCl^2$ qui arrête pratiquement le groupe 4358; les clichés montrent deux bandes excitées respectivement par 3650 et 4045 Å; ces excitations sont possibles dans ces trois mélanges qui sont parfaitement incolores; en effet, les traces de produits nitreux jaunes que renferme l'acide sont oxydées en quelques heures par le nitrate d'ammonium.

Nous retrouvons dans les mélanges binaires étudiés les fréquences (n_1, n_2, ..., n_8) trouvées précédemment pour l'acide nitrique seul ([1]); on peut observer que la dilution de l'acide nitrique par du nitrate d'ammonium produit une augmentation des valeurs de ces fréquences, effet semblable à celui de la dilution par l'eau ([1]); dans les deux cas les fréquences les plus sensibles à cet effet de dilution sont n_1 et n_3.

Nous retrouvons également dans les mélanges étudiés les trois fréquences Raman (notées plus haut n'_1, n'_2 et n'_3) de l'ion NO^3; elles ont pour valeurs dans le nitrate d'ammonium :

	n'_1.	n'_2.	n'_3.
Dans le nitrate cristallisé ([2])	709	1043	–
Dans la solution aqueuse ([2])	728	1050	1361
Dans la solution nitrique	728	1053	1339

La première de ces fréquences caractéristiques a la même valeur pour la solution aqueuse et la solution nitrique, valeur qui diffère nettement de celle qu'on observe dans le nitrate cristallisé anhydre; la valeur 709 est donc caractéristique de l'ion NO^3 étroitement entouré de cations, la valeur 728 se rapporte à l'ion NO^3 partiellement libéré de l'influence des cations, par dissolution du nitrate, que ce soit dans l'eau ou dans l'acide nitrique.

Il y a lieu de remarquer que les raies n_2 et n_6 de l'acide nitrique ne se superposent pas aux raies n'_1 et n'_3 du NO^3NH^4; ces raies n_2 et n_6 ne correspondent donc pas à des fréquences ioniques.

Enfin la bande de 3100 à 3300 cm^{-1} ne peut provenir que de vibrations d'atomes H; comme l'on ne connaît pas de fréquence 3200 pour l'ion NH^4, il est très probable que la bande se rattache aux oscillations de l'atome H de la molécule $O^2N — O — H$.

([1]) Médard et Volkringer, *Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 833.
([2]) D'après Kohlrausch, *Der Smekal-Raman Effekt*, Berlin, 1931, p. 344.

EXPLOSIFS. — *Sur l'aptitude à la destruction des explosifs par inflammation dans le vide.* Note de **M. E. Burlot**, présentée par M. G. Urbain.

Les explosifs sont généralement, pour ce qui concerne leur usage, classés en deux catégories :

a. Les explosifs de remplissage (dérivés nitrés des carbures, des phénols; esters nitreux ou nitriques; mélanges de corps comburants et combustibles);
b. Les explosifs d'amorçage ou excitateurs (fulminate, azides ou azotures).

Cette distinction repose sur la manière dont les explosifs se comportent au contact d'une flamme ou d'un corps incandescent dans les *conditions les plus habituelles d'emploi*.

Les explosifs *a* brûlent tant que leur masse n'est pas trop considérable ou la pression qu'ils supportent trop élevée, c'est-à-dire se détruisent sans que cette combustion dégénère en détonation, phénomène caractérisé par la naissance de l'onde explosive.

Pour les explosifs *b* au contraire, la détonation apparaît avec un caractère de fatalité même sous les masses les plus faibles sans que l'on puisse observer une combustion préalable de quelque durée.

Cette distinction n'est pas aussi fondamentale qu'elle le paraît et nous apportons la preuve expérimentale que l'azoture de plomb, tout comme le fulminate de mercure [1], ne fait pas exception à la règle suivante :

Au-dessous d'une certaine pression limite, la destruction massive (par combustion, déflagration ou détonation) des poudres ou des explosifs ne peut être amorcée par contact avec une flamme ou un corps incandescent si ce contact est de courte durée.

Nous avons effectué systématiquement plus de 200 expériences à ce sujet

---

[1] Dans des conditions expérimentales différentes (voir *Comptes rendus*, **193**, 1931, p. 171). MM. Laffitte et Patry ont montré qu'en utilisant pour l'allumage un cordeau Bickford on n'obtient pas le régime détonant du fulminate placé à l'air libre sous forme d'une traînée suffisamment étroite.

Il faut noter également que Wöhler (*Zeits. Schies. Sprengst.*, **2**, 1907, p. 204) avait signalé que dans certains cas l'inflammation du fulminate n'est pas instantanée.

Mais Laffitte admet (*loc. cit.*) que lorsque le fulminate est dans un tube on obtient toujours une détonation même en amorçant avec le cordeau Bickford. Quant à l'azoture de plomb on n'aurait jamais obtenu que le régime détonant même avec une très mince traînée à l'air libre amorcée avec le cordeau Bickford.

et nous avons vérifié que cette règle peut être admise pour les explosifs *a*, mais qu'elle est également vérifiée pour les explosifs *b*, tels que le fulminate de mercure et l'azoture de plomb dans les conditions suivantes :

Masse d'explosif soumise à l'épreuve : $p > 0^g,1$. Densité d'encartouchage égale à la densité gravimétrique. Mise de feu au moyen de l'inflammateur dont sont munies les amorces électriques détonantes du commerce, le fusible étant plongé entièrement dans la masse de l'explosif. Dans nos expériences le fusible avait les caractéristiques suivantes :

Diamètre, 45/1000e de millimètre; longueur, $2^{mm},3 \pm 0,1$; température de fusion, 1360°; chaleur latente de fusion, 68 cal/g; chaleur spécifique, 0,127 cal/g; conductibilité thermique, 0,06 cal/g cm²/cm/sec; résistivité électrique, 48 microhms.

Ces conditions expérimentales précisent :

L'énergie calorifique mise en œuvre au sein de l'explosif, l'ordre de grandeur du temps employé à sa dispersion, les dimensions de la surface de contact, enfin, les dimensions de la masse d'explosif dans laquelle le phénomène peut évoluer.

Nous avons ainsi observé les phénomènes suivants :

1° Il y a une pression limite au-dessous de laquelle la destruction de l'explosif amorcé au contact du fusible ne peut se propager dans la masse de l'explosif.

Cette pression est supérieure à 1^{mm} de mercure pour le fulminate de mercure et de l'ordre de 1/50 de millimètre pour l'azoture de plomb. Elle varie d'ailleurs avec la dimension des particules solides séparées par tamisage.

2° Il existe, pour l'azoture comme pour le fulminate de mercure, une phase de destruction lente (combustion) précédant la détonation.

Cette phase est très facile à observer avec le fulminate de mercure. Nous l'avons également mis en évidence pour l'azoture de plomb dans les conditions que voici :

1° *Essai* n° 3 (14 décembre 1932). — Poids d'azoture mis en œuvre : 1^g. Pression inférieure à 1^{mm} de mercure. La mise de feu n'est suivie d'aucune déflagration. L'enveloppe de l'explosif paraît intacte. Elle porte toutefois sur sa face intérieure des traces noirâtres qui ont été identifiées, sans aucun doute possible, pour des traces de plomb.

L'inflammateur montre que le courant électrique a élevé la température du fusible jusqu'à un point voisin de la température de fusion, sinon égal.

Un fragment de ce fusible n'est pas complètement fondu. Il sert de support à une perle d'azoture ayant $0^{mm},5$ de diamètre environ et pesant 1/10 de milligramme. Cette perle, de couleur brun noir au contact du fusible,

est le témoin d'un début de destruction, sans transmission au restant de la masse, de l'azoture demeuré intact.

2° *Essais nos* 53, 56, 59 *et* 60 (17/11/1933) : Allumeurs comme décrit ci-dessus mais sélectionnés avec résistance ohmique comprise entre 0,95 et 1 ohm. Courant sous 45 volts. Intensité 1 ampère. Pression égale à 1/20e de millimètre de mercure évaluée au moyen d'un tube à effluve (mesure de l'espace sombre de Hittorf). A la mise de feu on remarque une élévation de pression : cette dernière passant de 1/20e de millimètre à 1/10e de millimètre.

Par la suite on constate que la masse d'azoture demeurée inaltérée renferme des agglomérats de grains dont quelques-uns relativement volumineux et de couleur gris noir. Nous les avons identifiés : ce sont des grains d'azoture plus ou moins décomposés.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur quelques β-oxyacétals arylaliphatiques et leurs produits d'hydrolyse.* Note (1) de M. **Marcu Rotbart**, présentée par M. Delépine.

Dans deux Notes précédentes (2) nous avons étudié successivement les acétals β-cyclohexoxyliques et les aldéhydes qui en dérivent, puis les acétals β-alcoxyliques du type

$$R-O-CH^2-CH\begin{matrix}\diagup OC^2H^5\\ \diagdown OC^2H^5\end{matrix},$$

où R représente un reste d'alcool saturé en C^8, C^{10}, C^{12}, C^{14} et C^{16}, avec les aldéhydes correspondants.

La présente Note a pour objet les acétals correspondant à quelques alcools arylaliphatiques primaires, benzylique (3), anisique, β-phényléthylique (3), hydratropique à un alcool secondaire : α-phényléthylique, et à deux alcools tertiaires : phényl-2-propanol-2 (diméthylphénylcarbinol) et phényl-1-méthyl-1-propanol-2 (diméthylbenzylcarbinol).

Les acétals ont été préparés conformément à la technique exposée précédemment : action du bromacétal sur l'alcoolate sodé, en présence de

(1) Séance du 13 novembre 1933.

(2) L. Palfray, S. Sabetay et M. Rotbart, *Comptes rendus*, 196, 1933, p. 1508; Marcu Rotbart, *Ibid.*, p. 2013.

(3) Déjà sommairement décrits par S. Sabetay et D. Mira, *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 617, qui ont noté la difficulté d'hydrolyser les acétals correspondants.

cuivre, à l'autoclave à 170-180°, pendant 3 heures. On ne peut ici faire l'alcoolate à partir du sodium en poudre dans le toluène, car il se fait une hydrogénation du noyau.

L'alcoolate benzylique peut s'obtenir directement par dissolution de KOH dans l'alcool bouillant, mais, pour lui comme pour les autres, la méthode la plus avantageuse a été celle du *déplacement*, c'est-à-dire l'action de l'alcool sur l'éthylate de sodium sec. Les rendements ont été de 70 à 88 pour 100, sauf pour les alcools tertiaires, où il n'a été que de l'ordre de 25 pour 100, ce qui montre l'influence du degré de la fonction alcool sur l'aptitude à la condensation.

Déjà avertis par la Note de Sabetay et Mira, nous avons essayé l'hydrolyse des acétals avec un acide faible. Comme on pouvait le prévoir, l'acétal dérivé de l'alcool β-phényléthylique est relativement solide. Avec SO^4H^2 à 7 pour 100, il fournit l'aldéhyde avec un rendement de 60 pour 100. L'acétal dérivé de l'alcool hydratropique a une stabilité analogue. L'hydrolyse par SO^4H^2 à 5 pour 100 fournit l'aldéhyde avec un rendement de 76 pour 100 et peu de résines. Les acétals benzyloxy- et anisyloxy- sont beaucoup plus fragiles, surtout le dernier. Avec SO^4H^2 à 1 pour 100 le premier fournit l'aldéhyde (rendement 61 pour 100). A la même concentration, le second se coupe partiellement en alcool anisique sans donner d'aldéhyde, avec SO^4H^2 à 5 pour 100 il donne un peu d'aldéhyde et surtout de l'alcool anisique.

L'acétal de l'alcool secondaire (α-phényléthylique) qui peut être envisagé comme méthylbenzylique est encore plus fragile que son homologue. SO^4H^2 à 1 et même 0,5 pour 100 coupe l'acétal et libère 1/3 environ de l'alcool de départ. On n'obtient pas d'aldéhyde.

Il en est de même, *a fortiori*, avec les acétals de nos alcools tertiaires. *La fonction éther-oxyde en β s'hydrolyse bien plus facilement que la fonction acétal.*

Nous indiquerons les propriétés des oxy-acétals et des aldéhydes correspondants :

Benzyloxyacétal ($C^{13}H^{20}O^3$) : $E_{12} = 143°$; $d_4^{24,5} = 1,0020$; $n_D^{24,5} = 1,4875$. R_D tr. 64,35; calc. 63,56. OC^2H^5 % tr. 40,26; calc. 40,17.

Benzyloxyacétaldéhyde ($C^9H^{10}O^2$) : $E_{11} = 109\text{-}111°$; $d_4^{18} = 1,1107$; $n_D^{18} = 1,5345$. R_D tr. 42,00; calc. 41,81. *Semicarbazone :* F = 119°, assez soluble dans l'eau froide.

Anisyloxyacétal ($C^{14}H^{22}O^4$) : $E_{16} = 181°$, $E_3 = 152°$; $d_4^{21} = 1,0398$; $n_D^{21} = 1,4920$. R_D tr. 70,30; calc. 69,82 ($2OC^2H^5 + OCH^3$) % tr. 48,11; calc. 48,01.

Anisyloxyacétaldéhyde ($C^{10}H^{12}O^3$) : $E_{15} = 157\text{-}160°$; $d^{21} = 1,1116$; $n_D^{21} = 1,5119$. R_D tr. 48,60; calc. 48,07. *Semicarbazone :* F = 160-160°,5.

β-Phényléthoxyacétal ($C^{14}H^{22}O^{3}$) : $E_3 = 126°-128°$; $d_4^{25} = 0,9785$; $n_D^{25} = 1,4770$. R_D tr. 68,73; calc. 68,18. OC^2H^5 % tr. 37,92; calc. 37,81.

β.Phényléthoxyacétaldéhyde : $E_{15} = 120-122°$; $d_4^{24} = 1,0680$; $n_D^{24} = 1,5216$. R_D tr. 46,80; calc. 46,43. *Semicarbazone* : F = 88°,5.

β.Phényl-β-méthyléthoxyacétal (hydratropique) ($C^{15}H^{24}O^{3}$) : $E_5 = 130-132°$; $d_4^{24} = 0,9831$; $n_D^{25} = 1,4750$. R_D tr. 72,17; cal. 72,80. OC^2H^5 % tr. 35,92; calc. 35,71.

β.Phényl-β-méthyléthoxyacétaldéhyde ($C^{11}H^{14}O^{2}$) : $E_{16} = 134-136°$; $d_4^{24} = 1,0540$; $n_D^{24} = 1,5200$. R_D tr. 51,34; calc. 51,05. *Semicarbazone* : F = 89-89°,5.

α.Phényléthoxyacétal ($C^{14}H^{22}O^{3}$) : $E_{15} = 138-140°$; $d_4^{22,5} = 0,9772$; $n_D^{22,5} = 1,4671$. R_D tr. 67,60; cal. 68,18. OC^2H^5 % tr. 38,01; calc. 37,81.

Phényl-2-propoxy-2-acétal ($C^{15}H^{24}O^{3}$) : $E_{16} = 150-152°$; $d_4^{20} = 0,9756$; $n_D^{20} = 1,4780$. R_D tr. 73,11; calc. 72,80. OC^2H^5 % tr. 35,60; cal. 35,71.

Phényl-3-méthyl-2-propoxy-2-acétal ($C^{16}H^{26}O^{3}$) : $E_2 = 115-118°$; $d_4^{24} = 0,9730$; $n_D^{24} = 1,4775$. R_D tr. 77,32; calc. 77,41. OC^2H^5 % tr. 33,58; cal. 33,83.

Constatant la fragilité à l'hydrolyser de ces derniers acétals, nous avons préparé, pour les hydrolyser, les deux éthers-oxydes

$$C^6H^5-CH(CH^3)-OC^2H^5 \quad \text{et} \quad CH^3-O-C^6H^4-CH^2-O-C^2H^5.$$

Le premier a été décrit complètement [1]; pour le second, dont Späth [2] n'a donné que le point d'ébullition, nous avons déterminé les constantes

$E_{15} = 115-117°$; $d_4^{18} = 1,0181$; $n_D^{18} = 1,5051$; R_D : tr. 48,37; calc. 48,06.

L'éther α-phényléthylique, traité par SO^4H^2 à 1 pour 100, comme l'acétal correspondant, s'hydrolyse pour 50 pour 100 en alcool α-phényléthylique. L'éther anisique, traité par SO^4H^2 à 5 pour 100, comme l'acétal correspondant, s'hydrolyse en alcool pour 1/5ᵉ, et le reste se résinifie.

Donc, *la sensibilité à l'hydrolyse de la fonction éther-oxyde en β, dans les acétals précités, n'est pas exceptionnelle, elle est d'un ordre de grandeur comparable à celle des éthers-oxydes correspondants.*

CHIMIE ORGANIQUE. — *Étude dans la série des thioniums aryliques.*

Note de MM. **Ch. Courtot** et **T. Y. Tung**, présentée par M. M. Delépine.

Dans une précédente Communication, l'un de nous [3] a mis en évidence les chlorures de thioniums aryliques purement hydrocarbonés, dans la pré-

(1) T. E. Thorpe, *Jahrs. Fortsch. Chem.*, 1, 1869, p. 412.

(2) *Monatshefte für Chemie*, 35, 1914, p. 330.

(3) Ch. Courtot et P. Chiffert, *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 986.

paration de plusieurs sulfinones aromatiques, au moyen du chlorure de thionyle, réagissant sur les hydrocarbures aromatiques avec Cl^3Al comme agent de condensation.

Dans le présent travail, *nous généralisons la préparation de ces thioniums, en partant de sulfinones, symétriques ou non, que nous condensons avec diverses combinaisons chloraluminiques d'hydrocarbures. Nous arrivons ainsi, et avec des rendements souvent quantitatifs, à des chlorures de thionium portant deux ou trois radicaux aromatiques hydrocarbonés différents.*

Ce mode opératoire confirme les vues exposées précédemment sur le processus réactionnel et nous a permis d'isoler à l'état cristallin, le prototype de la série : le chlorure de triphénylthionium que jusqu'alors nous n'avions fait qu'entrevoir sous forme de complexe avec le chlorure ferrique.

Chlorure de triphénylthionium. — On fait réagir 250^g de Cl^3Al sur 500^g de benzène, puis on introduit progressivement 200^g de diphénylsulfinone bien sèche et pulvérisée. On agite, à 40°, pendant 4 ou 5 jours. Après hydrolyse, la couche benzénique renferme la sulfinone non attaquée, alors que la couche aqueuse contient le thionium. On extrait celle-ci d'abord au benzène, puis au chloroforme; cette dernière solution, après évaporation, laisse le thionium. Il cristallise d'une solution alcoolique ou acétonique à laquelle on ajoute une petite quantité d'eau. Il forme alors un monohydrate $(C^6H^5)^3C.Cl, H^2O$, en très longues aiguilles blanches, fragiles, $f = 142\text{-}143°$. Il se dissout aussi dans l'acide acétique et l'acétate d'éthyle. Il est, par contre, insoluble dans l'éther, le benzène, l'éther de pétrole, le tétrachlorure et le sulfure de carbone, propriétés communes aux thioniums décrits. Hydraté, il perd son eau de cristallisation à 60°, sous vide. Son point de fusion devient alors imprécis. Il fond à 277° avec décomposition instantanée quand on le jette dans un bain d'air déjà porté à cette température. Mais plus bas, à 230°, la décomposition dure une minute. Ces propriétés se comprennent en se reportant à la transformation générale des thioniums en sulfure et dérivé halogéné. $(C^6H^5)^3SCl$ s'unit à Cl^2Hg; le complexe $Cl^2Hg(C^6H^5)^3S.Cl$ se présente en petites aiguilles blanches $f = 214\text{-}215°$ (déc.).

Dans des conditions opératoires tout à fait analogues, mais en limitant le temps de chauffage à 8 heures, nous avons obtenu, par condensation des xylènes *ortho* et *méta* avec la diphénylsulfinone :

Le chlorure d'o-xylyldiphénylthionium, mais ce thionium préparé depuis six mois n'a pas encore cristallisé.

Le chlorure de m-xylyldiphénylthionium. Celui-ci cristallise, au contraire, facilement de sa solution acétonique anhydre chaude, par simple refroidissement, en poudre blanche microcristalline $f = 179°$. Il absorbe alors facilement une molécule d'eau et se transforme en beaux prismes à base carrée $f = 123\text{-}124°$, non hygroscopiques.

D'autre part, la *pp'*-ditolylsulfinone a été opposée aux carbures suivants : benzène, toluène, *o*-xylène, *p*-xylène, cumène, ce qui engendre :

Le chlorure de phénylditolylthionium. Obtenu anhydre par refroidissement de la solution acétonique, il se présente en poudre cristalline blanche, très hygroscopique $f = 193\text{-}194°$. Il donne un monohydrate en glomérules incolores $f = 125\text{-}127°$, et un trihydrate en prismes trapus $f = 62\text{-}63°$.

Le chlorure de tritolylthionium. Nous avons déjà décrit ce corps (1). Anhydre, il fond mal à 228°. Le monohydrate fond à 138-140° en perdant l'eau de cristallisation. Il donne un tétrahydrate cristallisant en gros prismes incolores à base losange tronquée sur les angles aigus $f = 51\text{-}52°$.

Le chlorure d'o-xylylditolylthionium. Anhydre, il fond à 118-120°. Le bihydrate cristallise en beaux prismes, enchevêtrés, transparents, $f = 56\text{-}57°$.

Le chlorure de p-xylylditolylthionium. Nous n'avons pas réussi, jusqu'ici, à le faire cristalliser. Mais sa combinaison avec Cl^2Hg constitue une poudre cristalline blanche $f = 86\text{-}87°$.

La tétraméthyl-2.4.2'.4'-diphénylsulfinone, étudiée précédemment (1), a été condensée avec le toluène et l'orthoxylène. On obtient :

Le chlorure de dixylyltolythionium. — Petites étoiles blanches. Le thionium anhydre fond à 94-97°.

Le chlorure de trixylylthionium qui forme un trihydrate : grosses aiguilles prismatiques transparentes, $f = 60\text{-}61°$; alors qué le produit anhydre fond mal à 102-105°.

Enfin, la phénylparatolylsulfinone, $f = 73°$ (2), a été condensée avec le benzène, l'ortho et le paraxylène. Dans les deux derniers cas, nous obtenons des thioniums à trois radicaux aryliques différents.

Chlorure de diphénylparatolylthionium (3). — Il fond mal entre 232-234°.

Chlorure d'o-xylylphénylthionium (3). — Anhydre, il fond mal à 74-76°. Mais il conduit à un trihydrate bien cristallisé fondant nettement à 59-60°.

Chlorure de m-xylylphényltolylthionium. — Anhydre, il fond à 73-74°. Hydraté, il se transforme en magma cristallin dispersé dans une huile très visqueuse qui n'est pas encore complètement prise en masse.

Ces résultats montrent que cette méthode de condensation, entrevue par Smiles et le Rossignol (4) en ce qui concerne les dérivés aryliques alcoxylés, mais qui donne de mauvais résultats à ces savants, conduit dans notre cas, au contraire, à la méthode la plus pratique de préparation des thioniums aryliques purement hydrocarbonés.

---

(1) *Loc. cit.*

(2) *Thèse de Doctorat d'Université Chiffert*, Nancy, octobre 1932, p. 77. La préparation de la sulfinone a été reprise par plusieurs collaborateurs et le p. f. stabilisé à 73°. Voir Chaix, *Bull. Soc. Chim.*, 53, 1933, p. 701.

(3) *Thèse de Doctorat d'Université Chiffert*, Nancy, octobre 1932, p. 79.

(4) *Chem. Soc.*, 89, 1906, p. 698.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Synthèses avec des acides du type*

$$R - CH = CH - CH^2 - CO^2H$$

et des dérivés organomagnésiens mixtes (¹). Note (²) de MM. **D. Ivanoff** et **G. Pchénitchny**, transmise par M. V. Grignard.

Il a été montré (²) que les carboxylates de formule générale

$$Ar.CH^2.CO^2.MgCl,$$

où Ar est un radical arylique, possèdent un atome d'hydrogène méthénique labile. Si l'on remplace dans ces carboxylates le groupe arylique par le groupe $- CH = CH -$, dans les nouveaux carboxylates le même atome d'hydrogène est actif. Ces carboxylates donnent avec les dérivés organomagnésiens aliphatiques et α-$C^{10}H^7MgBr$, après carbonatation, les acides maloniques correspondants (³). Par contre, la réaction avec les dérivés magnésiens des bromures suivants : C^6H^5Br, m-$CH^3.C^6H^4.Br$ et p-$CH^3.C^6H^4.Br$ conduit aux acides β-hydroxysubstitués correspondants. Il en résulte que le pouvoir activant du groupe $- CH = CH -$ est du même ordre de grandeur que celui des radicaux phénylique et para-chlorophénylique (³).

Ces acides à double liaison, de même que les acides $C^6H^5.CH^2.CO^2H$ et o-$Cl.C^6H^4.CH^2CO^2H$ soumis à l'action de l'éthylate de sodium, ne donnent pas le dérivé sodé du pseudo-acide. Cela a été démontré en soumettant le mélange réactionnel à une carbonatation; nous n'avons pas obtenu les acides maloniques correspondants. Nous voyons donc que quelques-uns des dérivés organomagnésiens mixtes, et, plus spécialement, le chlorure d'isopropylmagnésium, sont de meilleurs réactifs pour les atomes d'hydrogène méthéniques labiles que les alcoolates des métaux alcalins.

Nous avons travaillé avec le phényl-4-butène-3-oïque-1,

$$C^6H^5 - CH = CH - CH^2 - CO^2H$$

(¹) Séance du 13 novembre 1933.

(²) D. Ivanoff et A. Spassoff, *Bull. Soc. chim.*, 49, 1931, p. 19.

(³) D. Ivanoff et A. Spassoff, *loc. cit.*, p. 371.

et l'hexène-3-oïque-1,

$$CH^3 - CH^2 - CH = CH . CH^2 . CO^2H.$$

Essais avec $C^6H^5 - CH = CH . CH^2 . CO^2H$ [1]. — *Les magnésiens de i*-C^3H^7.Cl *et* α-$C^{10}H^7$.Br ont conduit, après carbonatation, à l'*acide* [*phényl*-2']-*éthénylmalonique* : 4g,7 d'acide et 5g,7 de *i*-C^3H^7.Cl ont donné, après lavage au benzène, 4g,3 d'acide phénéthényl-malonique. L'acide fond, avec décomposition, à 133°. *Le magnésien de m*-CH^3.C^6H^4.Br a donné le *phényl*-6 *méta-tolyl*-3 *phénéthényl*-2 *hydroxy*-3 *hexène*-5-*oïque*-1. 5g d'acide et 13g,2 de *m*-CH^3.C^6H^4.Br ont donné 4g,7 d'acide qui a été recristallisé dans de l'alcool à chaud; petites aiguilles qui fondent à 138-139°.

Le magnésien de p-CH^3.C^6H^4.Br a donné le *phényl*-6-*paratolyl*-3 [*phénéthényl*]-2 *hydroxy*-3-*hexène*-5-*oïque*-1, $C^{27}H^{26}O^3$. Même rendement que ci-dessus. Dans l'alcool, à chaud, petits cristaux incolores qui fondent à 165°.

Le magnésien de C^6H^5.Br a donné le *diphényl*-3.6 [*phénéthényl*]-2-*hexène*-5-*oïque*-1. 5g d'acide et 12g C^6H^5Br ont donné 4g,9 d'acide. Dans l'alcool, à chaud, petites aiguilles qui fondent à 142-143°.

Essais avec $CH^3 . CH^2 . CH = CH . CH^2 . CO^2H$ [2]. — *Le magnésien de i*-C^3H^7.Cl, préparé à partir de 27g,3 *i*-C^3H^7.Cl, a donné, avec 14g d'acide, après carbonatation, 11g,5 d'un sirop qui cristallise après quelques jours. L'acide α-*butényl*-2-*malonique*, recristallisé dans CCl^4, constitue une poudre incolore qui fond, avec décomposition, vers 100°.

Le magnésien de C^6H^5Br a donné le *phényl*-3-α-*buténybl*-2-*hydroxy*-3-*octène*-5-*oïque*-1, $C^{18}H^{24}O^3$, qui cristallise dans l'alcool, à chaud, sous forme d'aiguilles brillantes fondant à 145°.

Le magnésien de p-$CH^3C^6H^4Br$ a donné le *paratolyl*-3-α-*buténybl*-2-*hydroxy*-3-*octène*-5-*oïque*-1, $C^{19}H^{26}O^3$, qui, dans l'éther de pétrole, cristallise en petits cristaux qui fondent à 124°,5. Il est soluble dans l'alcool, l'éther, l'acétone, le benzène et le chloroforme.

Les essais avec l'éthylate de sodium furent faits sur 1/20e mol-gr d'acide et 1/10e mol-gr d'alcoolate à 20 pour 100. Le mélange est chauffé au réfrigérant ascendant pendant 3 heures et carbonaté à 0°. La solution absorbe du gaz carbonique à peu près en quantité équivalente au métal. Après acidification, le gaz carbonique se dégage, car il se trouve sous forme de carbonate, et l'acide initial est récupéré.

---

(1) Préparé d'après H. Leoni, *Lieb. Ann.*, **256**, 1890, p. 64.

(2) Préparé par hydrogénation de l'acide sorbique d'après J. J. Sudborough et J. Thomas, *Chem. Soc.*, **97**, 1910, p. 245.

GÉOLOGIE. — *Nouvelles observations géologiques dans le Bas-Dahomey.* Note [1] de M. **Alexis Chermette.**

Le Bas-Dahomey est presque entièrement constitué, jusqu'à la hauteur du 7°30′ de latitude Nord, par des sédiments récents (Tertiaire), limitant au Nord la vaste pénéplaine gneissique du Moyen-Dahomey, et, au Sud, un important système de lagunes, bordant lui-même un mince cordon littoral. Ces assises s'individualisent en deux unités morphologiques bien caractérisées : au centre, une vaste dépression marécageuse, et, de part et d'autre de celle-ci, l'encadrant au Nord et au Sud, une double série de plateaux entaillés par les fleuves côtiers (Mono, Couffo, Ouémé et son affluent le Zou). Cette dépression connue sous le nom de *Lama* dans sa partie moyenne, entre le Couffo à l'Ouest et la grand'route Cotonou-Allada-Abomey à l'Est, se prolonge au Nord-Est par le Bassin des *Hollis*, vers la Nigéria, et au Sud-Ouest par le pays des *Tchis*, vers le Togo [2], décrivant dans le Bas-Dahomey un arc de cercle qui aurait pour centre Cotonou, avec un rayon d'environ 80^{km} et une corde de 130^{km} de longueur suivant la droite Agomé-Sévа (sud-est d'Athiémé), Illémon (nord-est de Pobé). Un substratum argileux, joint à un relief presque nul, transforment une bonne partie de l'année cette région en un vaste marécage, domaine du *poto-poto*, de la boue gluante (en portugais, *lama* = boue).

Les plateaux au nord de la dépression (Parahoué, Abomey, Zagnanado, Kétou) descendent en pente douce sur la Lama, alors que ceux situés au Sud (Adjas, Allada, Pobé-Sakété) la dominent par un escarpement.

Les causes qui ont pu provoquer un tel modelé sont demeurées longtemps obscures, faute de moyens d'investigation suffisants. Le levé de la Carte géologique détaillée du Bas-Dahomey a mis en lumière un certain nombre de faits nouveaux, permettant en particulier l'interprétation de l'allure topographique, en fossé, de la Lama.

R. Prokopenko a montré (1931-1932) que, contrairement à ce que l'on pensait jusqu'alors, la série argilo-gréseuse composant les plateaux au nord de la Lama ne provenait pas de la transformation *in situ* de roches cristallines, mais appartenait à des sédiments marins et continentaux (argiles limonitisées de Kétou à Lamellibranches et Gastéropodes, grès

---

(1) Séance du 18 septembre 1933.

(2) C'est ce qu'ont montré de bonne heure les premiers explorateurs du pays : Fourn, H. Hubert (H. Hubert, *Mission scientifique au Dahomey*, 1908, p. 231).

argileux de Dan à débris végétaux), attribués à l'*Éocène supérieur*, sous réserve d'études paléontologiques complémentaires en cours. J'ai pu constater moi-même (1932-1933) que la zone fossilifère de Kétou avait une extension plus grande que ne le pensait Prokopenko, ayant retrouvé des limonites fossilifères à Ibiyan et à Gabigon, respectivement à 20^{km} au sud-est et à 10^{km} au sud-ouest de Kétou.

Le soubassement gneissique ne se rencontre qu'à une profondeur de 40^{m} à 80^{m}, et seulement encore dans la partie nord de ces plateaux, la série argilo-gréseuse reposant au Sud sur la série argilo-schisteuse et marno-calcaire de la Lama, que Prokopenko assimile au *Lignite Group* des géologues de la Nigéria (Éocène moyen). L'examen d'un grand nombre de puits profonds m'a permis de voir moi-même que sous les plateaux méridionaux d'Allada, des Adjas et de Pobé-Sakété, on rencontre la même série schisto-argileuse que sur le rebord septentrional de la Lama. Le puits d'Adjadji-Sogoudo (plateau d'Allada) a recoupé ainsi un niveau d'*argile ligniteuse et pyriteuse*, en tous points identique à celui signalé par Prokopenko dans le puits de Locogba, au nord du Pays des Tchis.

J'ai rencontré dans les puits de Gandzazoumé (plateau de Parahoué) et de Lobogo (plateau des Adjas), des *bancs de calcaire* analogues à ceux qui affleurent dans le lit du Mono, sur la rive togolaise, à $2^{km},5$ en aval de Tokpli, analogues encore à ceux dont les débris jalonnent la dépression marécageuse (Voun-Akpenou-Tchito-Kpomé-Massé). Un puits récent m'a fourni de même, à Hodo-Méta (Kétou), ainsi qu'un autre plus ancien, à Ahouloumé (Adjas), des schistes argileux noirs avec *lentilles de gypse*, que l'on doit rapporter à la *série de la Lama*.

Aucun des nombreux puits profonds forés dans les plateaux méridionaux du Bas-Dahomey n'a rencontré le soubassement cristallin. La parfaite similitude de constitution géologique des plateaux tant du nord que du sud de la Lama, et l'absence de tout accident tectonique écartent toute idée de décrochement vertical quant à l'origine de ce fossé. Il faut voir dans la Lama la *trace d'une vallée subséquente*, et dans les pentes raides du nord du plateau d'Allada, une *côte*. J'ai pu constater le même fait en ce qui concerne les plateaux des Adjas et de Pobé-Sakété. La nature marécageuse de la dépression semble provenir du fait que l'érosion se trouve arrêtée de nos jours au niveau des schistes et des argiles. L'Ouémé et le Mono, qui ont de leur côté atteint la période de maturité, du moins dans leur cours inférieur, ont repoussé peu à peu, respectivement vers la Lama et le Pays des Tchis, la Sô et la rivière Sazué, dont les eaux, faute d'écoulement suffisant, séjournent dans la dépression durant la saison des pluies.

GÉOLOGIE. — *Sur les peranthracites et les anthracites vrais.* Note de M. P. Lebeau, présentée par M. H. Le Chatelier.

Au cours de nos recherches sur les combustibles, nous avions indiqué, en 1927 [1], en nous basant sur le fractionnement thermique des produits gazeux de la pyrogénation, que le groupe des anthracites pouvait être scindé en deux séries bien distinctes : pyro-anthracites et anthracites vrais.

Nous avons substitué au terme pyro-anthracite celui de peranthracite, qui ne préjuge pas de la nature des phénomènes géologiques ayant présidé à la formation de cette catégorie de combustibles.

Nous rappellerons que la pyrogénation progressive des peranthracites, réalisée par le procédé antérieurement décrit [2], fournit jusqu'à 1000° des volumes gazeux compris entre les limites extrêmes de $21^{m^3},5$ et 160^{m^3} à la tonne, alors que pour les anthracites vrais ces mêmes limites vont de 260 à 367^{m^3}.

Le maximum du dégagement gazeux peut être supérieur à 900°, et même à 1000°, et ne descendre que très rarement, pour les peranthracites, au voisinage de 800°; il apparaît, pour les anthracites vrais, à 800° ou entre 700° et 800°.

Les résultats acquis depuis nos premiers travaux nous ont prouvé le bien-fondé d'une telle classification, en faisant ressortir d'autres caractères aussi nettement différenciés, qui peuvent être ainsi précisés :

1° La composition centésimale des gaz résultant du fractionnement thermique montre qu'ils renferment une forte proportion d'hydrogène, allant de 80 à 90 pour 100, mais, pour les peranthracites le méthane fait défaut dans ces mélanges gazeux, ou s'y rencontre à une teneur inférieure à 2 pour 100; pour les anthracites vrais, au contraire, ce carbure existe de façon constante et en quantités comprises entre 4,84 et 10,11 pour 100.

2° Les analyses élémentaires effectuées pour tous les échantillons ont établi que dans le groupe des peranthracites, déduction faite des cendres et de l'eau, les titres en carbone sont très élevés, et peuvent dépasser 99 pour 100 (limites extrêmes : 97,95 et 99,33, correspondant respectivement à 2,05 et 0,67 pour 100 d'hydrogène). Dans le cas des anthracites vrais, le taux le plus fort en carbone a été de 97,31 pour 100 et le plus

(1) *Conférence faite au VIIe Congrès de Chimie industr.*, 16-22 octobre 1927.

(2) *Comptes rendus*, **177**, 1923, p. 320; *Chimie et Industrie*, **14**, 1925, p. 10; *Bull. Soc. Chim. de Belg.*, 35, 1926, p. 48; *Ann. Off. nat. des Comb. liq.*, n° 1, 1929, p. 22.

faible de 96,08, les teneurs en hydrogène étant de l'ordre de 3 à 4 pour 100; pour un seul échantillon, nous avons trouvé 2,97 pour 100 d'hydrogène.

3° Les points d'inflammabilité des peranthracites sont généralement supérieurs à 600° ou très approchés de cette température. Ceux des anthracites vrais sont notablement inférieurs et ont oscillé entre 525° et 545°. Exceptionnellement pour l'un de ces combustibles, le point a atteint 562°.

4° Les peranthracites sont pratiquement conducteurs de l'électricité, tandis que les anthracites vrais ont une très grande résistivité.

5° Tous les peranthracites ont la propriété de décrépiter lorsqu'on les chauffe brusquement à des températures voisines de 300°, propriété que l'on ne rencontre pas dans le groupe des anthracites vrais. Ce décrépitement est accompagné d'un départ d'allure explosive de vapeur d'eau, cause principale du phénomène.

6° Les dissolvants : alcool, acétone, mélange alcool-benzène, benzène, pyridine, ne prennent aucune coloration au contact des peranthracites, alors qu'ils acquièrent une teinte jaune plus ou moins foncé avec les anthracites vrais, les essais étant réalisés dans les mêmes conditions de divisions et de température.

7° On trouve également des différences très sensibles dans l'action des réactifs chimiques. L'acide azotique de densité 1,48 ne change pas de couleur en présence d'un peranthracite après un séjour à froid de 24 heures; avec les anthracites vrais on obtient, dans des délais allant de quelques minutes à 2 heures, des solutions d'un jaune brun plus ou moins foncé. Si l'on fait intervenir ce même réactif à chaud, les deux catégories de combustibles sont attaquées, mais les liquides, transparents dans tous les cas, ne se troublent pas sensiblement par l'addition d'eau pour les peranthracites, alors qu'ils donnent un précipité abondant lorsqu'ils proviennent de l'action de l'acide azotique sur les anthracites vrais.

On observe des divergences comparables dans l'utilisation du mélange sulfonitrique, ou encore dans l'évaluation du pouvoir réducteur vis-à-vis de l'acide sulfurique à la température ordinaire.

Cette étude a porté sur 21 échantillons de peranthracites se répartissant ainsi :

Intra-alpins	13
Tonkin (Mines du Dong-Trieu)	5
Russie (Mine du Donetz)	1
Isère (Mine de la Mure)	1
États-Unis	1

et sur 18 échantillons d'anthracites, à savoir :

Angleterre	6
Belgique	3
Hollande	1
Ruhr	1
France (Mines d'Anzin, de Messeix et du Nord d'Alès)	7

GÉOLOGIE — *Les formations triasiques du Tonkin occidental.* Note (1) de M. **Jacques Fromaget**, présentée par M. Ch. Jacob.

Dans une précédente Note (2), j'ai montré que le Trias marin occupait dans le Nord-Ouest du Tonkin des dépressions étroites, venant converger en un point situé aux environs de Laichau. Au Nord du parallèle de Dien Bien Phu (21° 30′), ces dépressions, au nombre de deux : le synclinal de la Rivière Noire et celui du Haut-Laos, séparent sur 150^{km} de longueur, c'est-à-dire jusqu'à leur point *présumé* de convergence, les trois grands éléments continentaux de l'Indochine : le nord du Tonkin, avec le massif calédonien du Fan Si Pan, l'Indosinia ou Indochine médiane et le Haut-Laos.

Malgré les nombreuses recherches entreprises par les géologues dans cette partie de l'Indochine, le Trias supérieur seul y a été identifié avec certitude; cependant, parmi les formations triasiques plus anciennes, le Ladinien pourrait être représenté par de rares grès ferrugineux néritiques et par quelques arkoses ou grès grossiers peu épais.

Ce Trias repose sur les formations les plus variées, depuis les orthogneiss calédoniens jusqu'aux calcaires ouralo-permiens à *Fusulina chamchitensis* et aux rhyolites du Permien ou du Permo-Trias. On ne lui connaît pas de couverture normale sur l'Indosina, ni sur le massif du Fan Si Fan; par contre dans le Haut-Laos la partie supérieure du Terrain rouge, dont la base salifère est norienne, appartient au Rhétien, au Lias et peut-être à des terrains plus récents (3).

Au Carnien, les faciès sont bathyaux dans les dépressions et néritiques sur les bords des continents. Au Norien, ils sont partout subcontinentaux ou néritiques et récifaux.

---

(1) Séance du 13 novembre 1933.
(2) *Comptes rendus*, 195, 1932, p. 809.
(3) *Comptes rendus*, 197, 1933, p. 341,

Stratigraphie, faunes et flores :

Synclinal de la Rivière Noire. — 2° *Norien*. — Terrain rouge avec grès à *Equisetum arenaceum* du Keuper moyen; conglomérats surtout calcaires et calcaires récifaux de Pa Ma (Rivière Noire), qui ont donné soit à G. Zeil, à L. Dussault ou à moi-même : *Spiriferina* aff. *Sp. orophila*, *Aulacothyris inflata*, *Rhynchonella cuneifornis*, *Montlivautia norica*, *Thecosmilia* cf. *norica*, *Stylophyllopsis* cf. *Zitteli*, *Isastrea profunda* et *Spongiomorpha gibbosa*.

1° *Carnien*. — *b*. Schistes violets du Haut Nam Ma à *Polycyclus Henseli*, *Juvavites* cf. *Toulai*, *Halobia comata*, *H. sicula*. *H. Mojsisovicksi* et *H.* cf. *Zitteli*. — *a*. Schistes jaunes ou noirs de Thanh Uyên, Phong Tho et Ban Nam Cuong à *Discotropites Plinii*, *Arcestes* aff. *sublabiatus*, *Pinacoceras* sp., *Margarites* sp., *Halobia rugosa*, *H. fascigera*, *H. Deningeri*, *H. sicula* et *Koninckina Telleri*. — Ces faunes appartiennent aux parties inférieure et moyenne du Carnien et peut-être aussi au Carnien supérieur avec *Koninckina Telleri*.

Synclinal du Haut-Laos. — 2° *Norien*. — Conglomérat du Col de N. Poun à éléments de roches éruptives.

1° *Carnien*. — *b*. Grès schisteux de Dien Bien Phu à *Discotropites Loutreli*. — *a*. Schistes et schistes gréseux gris ou bruns, à l'Est des précédents, à *Halobia* cf. *superba*, *H. Amœna*, *Monotis aviculæformis*, *Posidonomya fasciata* et *P. lineata*. *Discotropites Loutreli*, dont l'âge précis ne peut être donné étant mis à part, les autres formes indiquent, soit le Carnien moyen, soit le Carnien supérieur.

Bordure Ouest du Fan Si Pan. — 3° *Norien* : Absent.

2° *Carnien*. — Grès plus ou moins ferrugineux ayant fourni d'une part : *Monotis* aff. *M. rudis* du Carnien de Sicile et de l'autre : *Alectryonia montis caprilis* du Carnien moyen et supérieur.

1° *Ladinien*. — Grès ferrugineux à *Myophoria radiata* de la boucle du Fleuve Bleu.

Bord est de l'Indosinia. — 2° *Norien*. — Poudingues et terrain rouge.

1° *Carnien*. — *b*. Grès ferrugineux à *Spiriferina* cf. *Griesbachi* du Norien, *Myophoria* sp. (*M. radiata* Mansuy) et *Avicula Bochii* du Carnien supérieur. *a*. Schistes gréseux jaunes à *Arpadites? Clionites? Myophoria inæquicostata* et *Cardita Pichleri*.

Haut-Laos. — 2° *Norien*. — *b*. Base salifère du Terrain rouge, avec gypse et cuivre natif dans le Sillon Lu; puis série anthracifère de Phong Saly à *Glossopteris indica*. *a*. Schistes de Phong Saly et de M. Tia à *Anodontophora Münsteri*.

1° *Carnien* (?). — Arkoses.

Des roches intrusives alcalines, syntectoniques des mouvements néotriasiques, c'est-à-dire noriennes, complètent le matériel triasique [1]. Les sédiments carniens sont très plissés sous ceux du Norien qui le sont souvent peu.

---

[1] J. Fromaget, *Comptes rendus*, 197, 1933, p. 651.

Les affinités des faunes triasiques du Nord-Ouest du Tonkin sont surtout avec les Alpes, la Sicile et l'Himalaya; plus rares sont les espèces propres à l'Insulinde et à la Chine du Sud ou ayant un caractère cosmopolite.

Aux points de vue paléogéographique et tectonique, la répartition des espèces du Carnien pose des problèmes intéressants. Je me bornerai à faire remarquer ici qu'elle montre : 1° qu'à cette époque les deux synclinaux du Nord-Ouest du Tonkin étaient complètement séparés, aucune des espèces connues ne s'y trouvant à la fois; 2° que des communications ont existé dès la base du Carnien ou même dès le Ladinien supérieur entre le synclinal de la Rivière Noire et le Yunnan oriental, ainsi qu'en témoignent la présence d'*Halobia rugosa* et de deux Myophories dans ces régions; toutefois, les différences profondes qui paraissent exister entre les autres éléments de ces faunes dans la Chine méridionale et le Tonkin semblent indiquer que ces communications ont été précaires et de courte durée.

VOLCANOLOGIE. — *Sur un phénomène curieux de la solfatare de Pouzzoles.* Note de M. **P. Idrac**.

A la solfatare de Pouzzoles, près de Naples, se trouve comme l'on sait, un ancien volcan, dont le cratère très large est ouvert dans des tufs trachytiques; il forme un champ plat d'environ 2^{km} de tour. Du sol de cette plaine s'élèvent, en des points variés, de nombreuses fumerolles. Un phénomène assez curieux, que les guides se plaisent à montrer aux visiteurs, consiste à allumer au-dessus du sol des morceaux de papier ou une torche quelconque. En ce cas, les dégagements de vapeur des orifices avoisinants ne tardent pas à devenir beaucoup plus intenses : des dégagements se produisent même sur le sol uni en des points où il ne se produit rien normalement. Le phénomène est frappant, et, peu après l'allumage du papier, on voit surgir tout autour d'abondantes fumées.

MM. Melloni et Piria avaient déjà en 1840 (1) tenté d'expliquer le phénomène par des raisons chimiques que justifiait l'état de la science à cette époque, mais qui ne peuvent plus être admises maintenant.

Après avoir examiné le phénomène avec soin, nous avons cherché à le reproduire au laboratoire en créant un sol poreux bourré de fumées.

Pour cela, nous avons, confectionné une boîte plate de 2 à 3^{cm} de

(1) *Comptes rendus*, **11**, 1840, p. 354.

hauteur et de 1m de côté environ. La partie supérieure est formée d'un treillage métallique et l'intérieur rempli de paille de fer : le sol poreux est ainsi schématiquement reconstitué. Pour le remplir de fumées à la même température, nous avons capté à l'aide d'une cheminée verticale les fumées dégagées par un papier fumigène. Cette cheminée communiquait avec un serpentin refroidi dans un bac d'eau et qui aboutissait à l'intérieur de la boîte. Le tirage se produisait ainsi parfaitement et en quelques minutes la boîte était remplie de fumées, le tout étant à la même température.

Dans ces conditions, si l'air est bien calme, aucune fumée ne s'échappe de la boîte, mais si l'on allume un morceau de papier au-dessus de la surface du treillis, on voit au bout de peu de temps les fumées sortir tout autour, le phénomène durant (par un effet d'inertie) un certain temps après la suppression du papier, exactement comme cela se passe dans la nature.

Le vide partiel produit dans le terrain sous l'opérateur se propage de proche en proche, ce qui permet l'augmentation des fumées jusqu'à une certaine distance, fait qui avait surpris les premiers observateurs.

C'est donc la légère dépression créée par la présence de l'air chaud qui amorce un courant ascendant entraînant l'air chargé de fumées, maintenu dans le sol par viscosité entre les pores souterrains.

La preuve en est d'ailleurs dans le fait qu'en amorçant un courant ascendant par tout autre moyen mécanique, le phénomène se produit de la même façon.

Nous avons là un nouvel exemple de dégagement gazeux du sol créé par de très faibles dépressions, présentant ainsi une analogie lointaine avec le curieux phénomène des marnières que nous avons étudié avec M. Caulle (1).

GÉOGRAPHIE PHYSIQUE. — *Essai de reconstitution de l'histoire du réseau fluvial du Haut Atlas à l'est de Marrakech.* Note de M. **Jacques Bourcart**.

Je crois avoir montré (2) que les limons roses subatlasiques, naguère considérés comme d'âge oligo-miocène, n'étaient que les dépôts de grandes rivières quaternaires, descendant les pentes de l'Atlas; le Rdat primitif, l'Ourika et le Nfis anciens; ce réseau s'étant établi après l'asséchement du

(1) *Comptes rendus*, **193**, 1931, p. 70.
(2) *Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 845 et 1053.

chott chelléen du Haouz. Un climat de type soudanais, avec une végétation steppique, régnait alors. La nature des dépôts de ces cours d'eau nous montre que leur pente était relativement faible.

Les plateaux de limons roses du Rdat, l'extrémité inférieure du grand cône du Nfis, sont recouverts, sans transition, par un cailloutis à très gros éléments que j'ai attribué à la seconde période pluviale (1). Dans la vallée du Rdat, l'une et l'autre formation s'arrêtent à basse altitude; elles ne dépassent pas le Khemis des Tougganas, sur la route de Ouarzazat. Aucun dépôt analogue ne se montre en amont, où les vallées du Rdat et de ses affluents ont un extraordinaire caractère de jeunesse. De même, dans les vallées de l'Ourika et du Nfis, les limons roses ne dépassent pas, vers l'amont, la bordure de la zone subatlasique.

Il me paraît en résulter que ces deux formations ne sont qu'une partie des cônes ou lits de déjection de ces rivières, dont toute la vallée supérieure a été enlevée par l'érosion postérieure.

Une autre rivière de l'Atlas, l'Oued Zat, ne contient aucun dépôt analogue dans son bassin (à l'exception du lambeau précité du Khemis). Dans ce système, ce ne sont pas les trajets *conséquents* qui prédominent, mais les directions *subséquentes*. D'anciens affluents longitudinaux, tronçonnés par des captures récentes, ont laissé des portions suspendues, sèches, ou des replats très nets, avec le plus souvent des placages d'anciennes alluvions limoneuses, *jaunes*. Ce sont, d'amont en aval : l'Agdal n Tichka (avec des alluvions suspendues et une séguia), le système Asif Amassa-Asif Afra (Asgour), l'Agdal n Oufah (près du Zat) et la dépression entre le massif primaire d'Oujouj et la montagne triasique de Guédrous qui prolonge vers l'est l'Oued Tasfila. Dans cette direction, un placage d'alluvions est encore visible au-dessus de la cuvette de Zerekten. Plus en aval encore, un affluent longitudinal du Zat, le long de la route d'Ouarzazat, voit sa vallée brusquement interrompue par un cirque d'érosion très jeune, découpé par un affluent du Rdat qui coule en sens inverse.

Il s'ensuit que le système primitif du Rdat a été suivi par un autre système où les directions longitudinales prédominent. Puis sont venus les oueds récents, qui sont à nouveau conséquents, mais ne suivent pas exactement l'axe des vallées du premier système. L'érosion devient extrêmement active; la plupart des affluents du second système sont tronqués par des

(1) Pour le Nfis, ce cailloutis est noté a^1, alluvions anciennes, par M. Moret.

captures. Actuellement, le profil d'équilibre est loin d'être atteint, les oueds atlasiques sont en plein travail de creusement.

On peut donc tenter de reconstituer ainsi l'histoire quaternaire du pays de Marrakech :

A l'époque de grès de Rabat (Chelléen ?), un grand chott occupait le Haouz, communiquant facilement avec celui des Rehamna par les seuils de Bzou et de la Seguia Qaïdia à l'Est, par le col que suit la route de Mazagan, où il existe des témoins de cailloutis cimenté, à l'Ouest. Ni le réseau affluent, à pente probablement faible, ni l'exutoire du lac ne nous sont connus. Un peu plus tard (à l'époque de la *croûte* principale : Acheuléen ?), par suite d'un climat désertique, le lac s'assèche.

Un mouvement de soulèvement important de l'Atlas se produit alors, ainsi qu'un abaissement du Haouz. Par suite du climat soudanais qui règne à ce moment (Moustiérien ?), la désagrégation des roches de la chaîne est particulièrement active, des rivières conséquentes, à pente encore assez faible, déposent d'énormes cônes de limons et remplissent le Haouz sur une épaisseur qui parfois dépasse 250^m. Un peu plus tard, le poids très considérable des éléments du cailloutis supérieur montre que le débit des rivières s'est très brusquement et notablement augmenté. Je pense qu'il faut attribuer ce fait, plutôt à une notable recrudescence des pluies qu'à une glaciation dont il n'existe aucune preuve. Cette seconde période pluviale correspondrait aux dépôts des *tirs* des Doukkalas (Paléolithique supérieur ?).

Une phase de repos orogénique relatif correspond à l'établissement d'un réseau subséquent comme celui du Zat. Puis, le soulèvement reprenant, de nouveaux torrents conséquents s'établissent, auxquels succèdent les rivières torrentielles actuelles. C'est dans le bassin supérieur d'une de ces vallées récentes que ce trouvent les seules traces glaciaires certaines de la chaîne. Elles correspondraient donc à un maximum tardif de précipitation et à une altitude déjà très élevée des sommets.

Depuis l'époque des limons roses, tous les cours d'eau de l'Atlas se jettent dans un grand fleuve, le Tensift, qui draine tout le Haouz. Sa tête doit évidemment être cherchée dans les oueds Lakhdar et Tessaout. Mais ceux-ci ont été, comme on le sait, capturés par le système de l'Oum er Rebia.

L'ancienne jonction entre la Tessaout et le Tensift est encore marquée sur le terrain par la Séguia Soltania. La capture peut s'expliquer par un soulèvement relatif de la partie orientale du Haouz, devenue solidaire de l'Atlas, relativement à l'axe Tadla-Rehamna. On sait d'ailleurs que les

torrents initiaux du Lakhdar, dans le Massif du Mgoun, ont poussé leurs têtes au delà de la ligne de crête de l'Atlas, enlevant des portions du bassin supérieur des oueds sahariens ([1]). Le soulèvement de l'Atlas paraît donc s'être poursuivi jusque dans des temps très récents.

Cet essai de reconstitution est forcément hypothétiqne et demanderait de longues et minutieuses vérifications. Il a toutefois le mérite de faire rentrer tous les faits connus daus un cadre valable pour l'ensemble du Maroc atlantique. Je suis loin de penser qu'il entraînera l'assentiment de tous les géologues et géographes marocains. Mais, peut-être, en provoquant la contradiction, servira-t-il à l'éclosion de nouveaux travaux qui élucideront un problème passionnant?

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Étude de la variation du rayonnement cosmique entre les latitudes 45° Nord et 38° Sud.* Note ([2]) de MM. **P. Auger** et **L. Leprince-Ringuet**, présentée par M. Maurice de Broglie.

On sait que la nature des rayonnements ultrapénétrants, dits *cosmiques* n'est pas encore déterminée avec certitude. Deux hypothèses principales sont en présence : l'une qui attribue au rayonnement primaire, c'est-à-dire à celui qui atteint les parties supérieures de l'atmosphère, une nature électromagnétique; l'autre qui attribue à ce rayonnement une nature corpusculaire. Dans le premier cas, on aurait affaire à des rayons ultragamma de quantum très élevé, dans l'autre à des électrons positifs ou négatifs de grande énergie.

L'action du champ magnétique terrestre qui se fait sentir dès une grande distance de l'atmosphère sur des corpuscules chargés, et qui est nulle pour des rayonnements électromagnétiques, peut servir à la discrimination. Les calculs qui ont été faits à ce sujet montrent que des électrons d'énergie inférieure à environ 10^{10} électrons-volts ne peuvent atteindre la surface terrestre au voisinage de l'équateur géomagnétique, et qu'il existe, pour les groupes d'électrons d'énergies inférieures, une zone interdite autour de l'équateur, zone d'autant plus large que l'énergie est plus petite.

Plusieurs auteurs ont étudié l'ionisation globale produite par les rayons cosmiques dans une chambre d'ionisation, en fonction de la latitude du lieu

([1]) Observation de M. Jacques de Lépiney.

([2]) Séance du 13 novembre 1933.

d'observation. Certains d'entre eux (Clay, Compton et ses collaborateurs) ont ainsi trouvé une diminution appréciable de cette ionisation au voisinage de l'équateur. Cette baisse a été considérée comme un argument en faveur de l'hypothèse corpusculaire.

Il nous a paru utile de faire des mesures en des points de latitudes diverses avec des appareils permettant la détection individuelle des rayons corpusculaires qui sont, au niveau de la mer, la cause directe de l'ionisation observée. Nous avons employé la méthode des coïncidences par groupes de trois compteurs du type Geiger-Müller, l'orientation du plan des compteurs permettant de choisir les corpuscules arrivant dans une direction déterminée. Des dispositifs d'amplification et d'enregistrement, analogues à ceux imaginés par Rossi, indiquaient directement le nombre de rayons qui traversaient les appareils en un temps donné.

Trois appareils ont fonctionné sans interruption pendant 65 jours, installés à bord d'un paquebot qui effectue le trajet du Havre à Buenos-Ayres et retour. Deux d'entre eux, dans lesquels les compteurs étaient assez écartés les uns des autres, dénombraient les rayons verticaux, avec ou sans filtration par 20^{cm} de plomb. Dans le troisième, les compteurs étaient plus rapprochés, ce qui donne des nombres plus considérables de coïncidences; ce dernier dispositif était orientable. L'ensemble des deux appareils 1 et 2 a enregistré 50000 rayons; l'appareil n° 3, 120000.

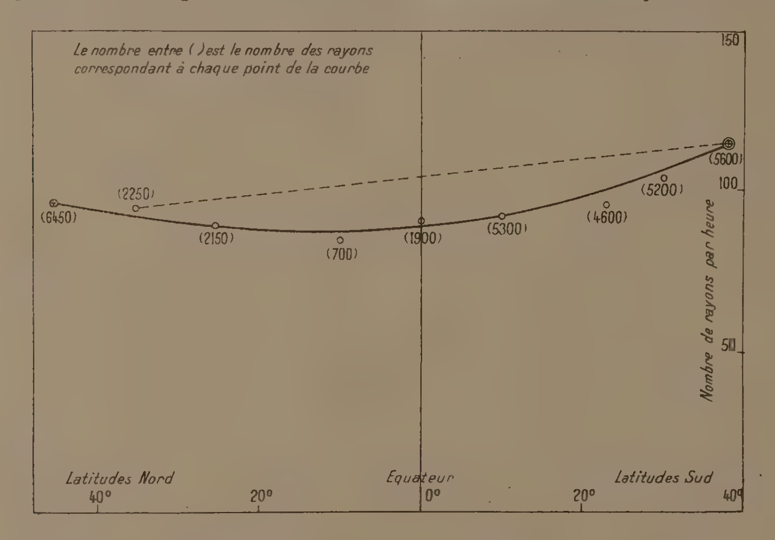
La figure représente les résultats de l'appareil n° 3 orienté verticalement, pendant la traversée de retour. Chaque point donne la moyenne du nombre de rayons observés par heure autour de la latitude indiquée en abscisse. Compte tenu de la baisse régulière en fonction du temps des indications de tous les compteurs (baisse que nos mesures ont montré être sensiblement linéaire), la courbe présente un minimum dans la région de l'équateur. La diminution du nombre de particules ionisantes arrivant verticalement à la surface de la Terre entre les latitudes 40° (Nord ou Sud) et 0° est d'environ 16 pour 100. La droite pointillée représente le vieillissement des appareils.

Les appareils 1 et 2 ont fourni des courbes analogues à l'aller et au retour. Les valeurs de l'effet de latitude obtenues avec les écrans de 20^{cm} de plomb ont été de 12 et 15 pour 100 pour l'un, de 13 et 13 pour 100 pour l'autre, ces quatre chiffres portant sur un nombre moindre d'enregistrements.

La comparaison des mesures faites avec et sans écran de plomb donne en chaque point un coefficient de filtration. Nous n'avons pas observé de

variation notable de ce rapport, qui s'est tenu au voisinage de 1,4. Si l'on doit déduire des indications données plus haut que la baisse équatoriale est moindre pour les rayons pénétrants que pour l'ensemble, cette différence est en tout cas trop faible pour que nous ayons pu mettre en évidence directement un pouvoir pénétrant moyen plus grand à l'équateur.

Signalons enfin que les courbes donnant le nombre de rayons cosmiques



en fonction de l'angle qu'ils font avec la verticale ne sont pas semblables à l'équateur et aux grandes latitudes. En particulier la symétrie entre les directions Est et Ouest, que l'on observe aux latitudes supérieures à 30°, est détruite au voisinage de l'équateur en faveur des rayons venant de l'Ouest. Ce résultat est à rapprocher des mesures de Johnson.

L'ensemble de ces résultats montre que le rayonnement cosmique est sensible à l'action du champ magnétique terrestre et que, au moins aux distances de l'ordre du rayon de la Terre, il est en partie formé de corpuscules chargés.

CHIMIE AGRICOLE. — *Sur le mode d'action des bouillies cupriques, rôle de la dessiccation.* Note de MM. **J. Branas** et **J. Dulac**, présentée par M. P. Viala.

Nous avons été amenés à distinguer, dans les bouillies cupriques, la phase dissoute [1] et la phase solide. Des mesures ont montré que la première était assez riche en cuivre au moment de la préparation des mélanges pour assurer une protection en accord avec le postulat de départ. Avant de faire intervenir la solubilité de la phase solide, on peut se demander si le cuivre, d'abord dissous, reprendra la même solubilité quand il aura été séparé de l'eau par évaporation. Le présent travail répond à cette préoccupation.

Technique. — 50^{cm^3} (correspondant à 1^g de SO^4Cu, aq.) des bouillies précédemment définies [1] (colonnes 1, 3, 5), sont versés dans des cuves en verre pyrex de 18×29^{cm}. Une série est soumise, en plein air à une évaporation brutale au soleil au cours du mois de juillet; une seconde série est placée dans les mêmes conditions au mois d'octobre, et une troisième est soumise à une évaporation très lente, en plein air mais à l'ombre, en octobre. La dessiccation demande respectivement 2 heures, 1 jour et 4 jours : ainsi deux facteurs ont joué : la vitesse et la température de dessiccation.

Huit jours après, on verse 50^{cm^3} d'eau distillée très pure [2] dans chaque cuve. La séparation du liquide et la détermination du cuivre qu'il a dissous sont faites par les procédés déjà indiqués.

Le tableau suivant contient les quantités de cuivre, exprimées en SO^4Cu, aq., contenus dans 50^{cm^3}.

	Bouillie bourguignonne.			Bouillie bordelaise.		
Base par kg SO^4Cu aq...	0^{kg},320.	0^{kg},425.	0^{kg},757.	0^{kg},168.	0^{kg},0225.	0^{kg},400.
Dessiccation en 2 heures au mois de juillet.						
1er lavage...........	0^g,0005	0	0^g,00016	traces	0	0^g,0010
2e lavage...........	0,00016	0	traces	0	0	0,0005
3e lavage...........	traces	0	0	0	0	traces

(1) *Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 938. *Errata :* p. 939, ligne 19, *au lieu de* $Ca(OH^2)$, *lire* $Ca(OH)^2$; ligne 27 *au lieu de* calorimétrie, *lire* colorimétrie; ligne 29, *au lieu de* a été dosé, *lire* a été mesuré; p. 940, lignes 13 et 14, *supprimer* de la vitesse de dessiccation.

(2) Avec de l'eau distillée très pure au lieu d'eau de pluie, on évite l'influence dissolvante des divers constituants de l'eau de pluie, lesquels pourraient agir sur les dépôts.

Dessiccation en 1 jour au mois d'octobre.

	g	g	g	g		
1er lavage...........	0,05000	0,0010	0,0050	0,00160	0	traces
2e lavage...........	0,00500	0,0005	0,0016	0,00025	0	0
3e lavage...........	0,00100	0,00025	0,0010	0	0	0
4e lavage...........	0,00050	traces	0,0005	0	0	0
5e lavage...........	0,00016	0	0,00016	0	0	0
6e lavage...........	traces	0	0	0	0	0

Dessiccation en 4 jours au mois d'octobre.

1er lavage...........	0,0500	0,0010	0,0050	0	0	traces
2e lavage...........	0,0050	0,0005	0,0010	0	0	0
3e lavage...........	0,0010	0,00025	0,0005	0	0	0
4e lavage...........	0,0005	traces	0,0002	0	0	0
5e lavage...........	0,00025	traces	traces	0	0	0

On observe :

1° Que le mode de dessiccation influe profondément sur la solubilité du cuivre de la liqueur mère ;

2° Que, suivant les types de bouillies et suivant le mode de dessiccation, le cuivre qui était dissous dans la liqueur mère, au moment de la préparation de la bouillie, perd, soit totalement, soit partiellement, sa solubilité.

Ce que l'on peut interpréter ainsi :

a. Dans la bouillie bourguignonne acide, il reste du SO^4Cu qui n'avait pas été précipité ;

b. Dans la bouillie bourguignonne neutre, le sulfate tétracuivrique qui avait été maintenu en solution par le CO^2 reprend d'autant moins l'état dissous que ce gaz s'est davantage diffusé dans l'air, ce qui se produit plus facilement en été qu'en automne ;

c. Dans la bouillie bourguignonne alcaline, la solubilité du cupricarbonate de soude diminue considérablement par dessiccation rapide à température élevée ;

d. Dans les bouillies bordelaises acides, neutres et alcalines la précipitation du cuivre d'abord dissous dans la phase liquide s'est poursuivie dans cette phase aux dépens du CO^3Ca [1]. Il faut noter que, par une dessiccation brutale, la chaux en excès dans la bouillie très alcaline ne se carbonate pas complètement, ce qui conserve une alcalinité favorable au maintien de la solubilité du cuivre.

---

[1] L. Sicard, *Étude de la composition et de la préparation de la bouillie bordelaise*, 1914.

Conclusions. — Les composés cupriques, solubles au moment de la préparation de la bouillie, éprouvent par la dessiccation une rétrogradation plus ou moins importante qui les empêche de reprendre dans l'eau distillée pure la concentration primitive. Ils se rangent alors au nombre des dépôts dont la solubilité constitue un autre problème.

Ces expériences montrent qu'après dessiccation les bouillies se classent en deux catégories : celles dont les dépôts contiennent encore assez de cuivre soluble pour rendre l'eau toxique, et celles dont les dépôts n'ayant plus de cuivre soluble à l'eau pure réclament à l'eau de pluie un certain pouvoir dissolvant pour lui en céder.

CHIMIE AGRICOLE. — *Influence des anions sur la fixation et la mobilisation de l'acide phosphorique dans les sols.* Note de MM. **A. Demolon** et **E. Bastisse**, présentée par M. C. Matignon.

Les phénomènes de fixation et d'échange des cations, dans le complexe absorbant des sols, ont fait l'objet de nombreux travaux. Le rôle des anions a retenu beaucoup moins l'attention, sauf en ce qui concerne PO^4.

L'étude de la floculation de l'argile colloïdale par les sels de potassium nous a montré (¹) qu'un certain nombre d'anions se comportent d'une façon singulière (PO^4 — SiO^3 — citrique — oxalique, etc.). Tous sont susceptibles de se fixer sur l'argile; nous les qualifierons d'*actifs* par opposition aux autres anions non retenus (Cl — NO^3 — SO^4 — acétique, etc.) que nous appellerons *inactifs*.

La fixation des anions actifs peut être constatée par voie directe; elle s'accompagne de l'apparition d'une alcalinité d'échange par un mécanisme comparable à celui qui donne lieu à l'acidité d'échange dans le cas des cations. Nous nous bornerons ici à examiner l'influence excercée par les divers anions sur les réactions de l'ion PO^4 dans le sol.

A. *Influence des anions sur la fixation de* P^2O^5. — 10^g de terre à briques décalcifiée par K Cl ont été traités par 100^{cm^3} de PO^4KH^2 à 20 milliéq. par litre. Après 1 heure d'agitation et 12 heures de dépôt, on détermine les quantités de P^2O^5 fixé. On a comparé à la fixation ainsi observée (= 100) celles obtenues en présence de sels potassiques à anions actif et inactif, le pH étant le même dans tous les cas (pH = 5,2). On a ainsi obtenu :

(¹) Demolon et Bastisse, *Comptes rendus*, 195, 1932, p. 790.

Fixation par comparaison avec le phosphate seul (= 100).

		Anions inactifs.		Anions actifs.	
		Cl.	SO^4.	Citrique.	Oxalique.
Concentration des sels ajoutés.	20 milliéq. par litre...	105	104	58	44
	50 milliéq. par litre...	116	125	49	33

Tous autres facteurs étant comparables, on constate que :

1° La présence d'un anion actif dans une solution de phosphate en contact avec le sol a pour résultat d'abaisser le taux de fixation de P^2O^5.

2° Inversement la présence d'un anion inactif élève le taux de fixation de P^2O^5.

Dans les deux cas, l'augmentation de la concentration de l'anion introduit accentue le phénomène observé.

Une interprétation de ces faits peut être trouvée dans les équilibres étudiés par Donnan, en admettant que la coexistence de deux sels inégalement diffusibles, l'un à anion actif, l'autre à anion inactif, entraîne une augmentation de la concentration du moins diffusible c'est-à-dire du premier, au contact du colloïde. Dans le cas de deux anions actifs, on observe simplement un phénomène de partage.

B. *Influence des anions sur la mobilisation de* P^2O^5 *fixé*. — On doit s'attendre à trouver des phénomènes inverses des précédents dans le déplacement par les solutions salines de l'acide phosphorique fixé par le sol.

Sur 5^g d'une terre à briques calcique, ou décalcifiée par KCl, ayant fixé P^2O^5 par contact avec des solutions de phosphates potassiques à différents pH, on fait agir 200$^{cm^3}$ de solution neutre à 20 milliéq. par litre des sels de potassium ci-après indiqués. Les quantités de P^2O^5 mobilisé sont exprimées en pour 100 de P^2O^5 fixé :

Cation fixé.................	K.	Ca.	K.	Ca.
pH des terres..............	5,4.	5,4.	7,8.	7,8.
	(P^2O^5 mobilisé pour 100 de P^2O^5 fixé.)			
Chlorure..................	18,3	23,3	9,6	24,2
Sulfate....................	18,8	24,7	12,1	26,7
Citrate....................	38,3	60,1	25,3	70,6
Oxalate....................	36,6	53,2	23,3	68,4

On constate que, dans tous les cas, les anions actifs donnent lieu à une mobilisation de P^2O^5 supérieure à celle observée pour les anions actifs.

C. *Conséquences agronomiques*. — L'insolubilisation de P^2O^5 des phos-

phates solubles s'effectuant très rapidement en surface, on peut prévoir que pour favoriser sa pénétration en profondeur, il y a lieu d'éviter les mélanges avec les sels à anions inactifs qui accélèrent sa fixation. L'expérience directe a pleinement confirmé ce point de vue.

SiO^3 se comporte comme un anion actif. L'hydrosol de silice dans les terres alcalines et le silicate de potasse dans les terres acides donnent lieu à une mobilisation importante de P^2O^5 fixé. Or, il a été souvent observé que l'addition de silicate au sol accroît les rendements; on constate en même temps une augmentation de P^2O^5 absorbé par les récoltes. Ce phénomène a donné lieu à diverses interprétations de caractère hypothétique ([1]). Les faits établis plus haut démontrent qu'il doit être attribué non pas à une action stimulante sur la plante, mais à une mobilisation des réserves du sol.

Les acides humiques dont nous avons démontré la fixation sur l'argile ([2]) constituent également des anions très actifs. Ces substances jouent pratiquement un rôle important dans la mobilisation des formes passives de l'acide phosphorique dans les sols de culture.

ZOOLOGIE. — *Un nouveau type de Poissons de la famille des Gobiidés* (Syrrhothonus Charrieri, *n. g.*, *n. sp.*). Note de M. **Paul Chabanaud**, présentée par M. Maurice Caullery.

En dépit des investigations dont elle ne cesse de faire l'objet, principalement en ce qui concerne la grande famille des Gobiidés, à laquelle M. F. de Buen consacre de savantes études, la faune ichthyologique marocaine vient de livrer à la Science une espèce totalement inédite, capturée sur le littoral de Tanger, par M. Henri Charrier ([3]). Je nomme la forme remarquable dont ce Gobiidé devient le type, *Syrrhothonus Charrieri*, n. g., n. sp. ([4]).

Le type, jusqu'ici unique, de *Syrrhothonus Charrieri* est un mâle, d'une longueur totale de 53mm. Il possède les caractéristiques générales du

---

([1]) Hall et Morison, *Proc. Roy. Soc.*, 77. 1906, p. 455; Lemmermann, *Zeits. Pflanz.*, B. 1928, p. 434; Nemec, *Bioch. Zeits.*, 190, 1928, p. 42; Thomas, *Science*, n° 1842, 1930, p. 442.

([2]) Demolon et Barbier, *Comptes rendus*, 188, 1929, p. 654.

([3]) Matériel transmis au Laboratoire des Pêches coloniales du Muséum, par M. R. Ph. Dollfus, Secrétaire de l'Office de Faunistique du Maroc.

([4]) Σύν, ῥώθων (narine).

groupe des *Gobiinae*, autrement dit celles du genre *Gobius*, lato sensu, bien que se séparant non seulement du genre *Gobius*, mais encore de toutes les espèces décrites de la famille des Gobiidés, par la fusion en un seul orifice des deux narines du même côté de la tête.

Les caractères qui apparentent *Syrrhothonus Charrieri* aux *Gobius* proprement dits sont les suivants : les deux mâchoires respectivement armées d'une large bande de dents subulées, petites et mobiles; les yeux grands, latéraux, rétrécissant fortement l'espace interorbitaire; la membrane branchiostège soudée à l'isthme, un peu en dedans de la base des pectorales; les deux dorsales séparées l'une de l'autre; la caudale subtronquée; les pelviennes fusionnées en un large disque, libre et muni d'un pli membraneux basilaire, développé jusqu'au sommet des deux épines, qui sont courtes. Les nageoires ont pour formule : D. VI-I 9; A. I 9; C. 9 + 15 + 10; Pect. 18; Pelv. I 5. La tête est totalement dépourvue d'écailles, ainsi que la partie antérieure de la région abdominale, sur les flancs, jusqu'à l'aisselle des pectorales et, sur le dos, jusqu'à la base du 6ᵉ rayon de la dorsale antérieure.

Par sa cyatotaxie, qui comprend les pores muqueux σ, λ, κ, α, γ, δ, ε, ρ, ρ′, ρ″, mais non le pore ω, ainsi que, entre autres séries de papilles, les suboculaires longitudinales *a*, *b*, *c* et *d* et les transversales 1 à 5, *Syrrhothonus charrieri* pourrait être apparenté aux *Pomatoschistus* (Gill) de Buen, s'il ne se séparait de toutes les formes connues, tant européennes qu'américaines ou indo-pacifiques, par la structure toute spéciale de sa région nasale : les deux narines du même côté sont réunies en un orifice commun, en forme de fente longitudinale, obturé, sur la majeure partie de son étendue, par un double processus membraneux, mobile, garnissant les deux bords de la fente. Cet orifice nasal est percé dans un renflement préoculaire, limité postérieurement par la surélévation en une carène saillante, du segment pleurethmoïdal de l'orbite. A son extrémité la plus voisine de l'œil, la fente nasale devient subcirculaire et cesse d'être rebordée; cette extrémité postérieure de l'orifice nasal correspond à la narine postérieure des espèces pourvues de deux narines distinctes, mais ouverte contre la carène préoculaire, c'est-à-dire beaucoup plus près de l'œil que chez les Gobiidés typiques.

En outre, la bouche est extrêmement oblique; la symphyse prémaxillaire et la symphyse mandibulaire sont situées au niveau de la région frontale, tandis que l'extrémité viscérale du maxillaire ne dépasse pas l'aplomb du bord rostral de l'orbite.

Carène préoculaire et surtout fusion des deux narines en un seul orifice sont sans exemple connu dans la famille entière des *Gobiidae*.

L'hypothèse est improbable d'un transport accidentel de ce poisson par le courant profond W-E, remontant à l'approche du seuil de Gibraltar, car elle supposerait à *Syrrhothonus Charrieri* des habitudes, sinon abyssales du moins benthiques, par trop en désaccord avec les mœurs bien connues d'une immense famille, dont tous les membres fréquentent les eaux littorales, de faible profondeur, et dont un grand nombre peuplent même les eaux douces des fleuves ou des lacs.

Il ne peut s'agir, dans le cas présent, que d'une étroite localisation, peut-être à caractère relicte, non sans analogie avec le confinement de certains Poissons sédentaires (*Synaptura lusitanica* Capello, entre autres) dans la baie de Sétubal ou dans le golfe de Cadix (1).

ZOOLOGIE OCÉANOGRAPHIQUE. — *Présence d'*Anotopterus pharao *Zugmayer dans l'estomac de Germons.* Note de M. **R. Legendre**, présentée par M. L. Lapicque.

Anotopterus pharao est un Poisson d'aspect singulier dont on ne connaissait jusqu'ici que deux individus. Le premier fut recueilli le 4 septembre 1910 par la *Princesse Alice*, au large du cap Saint-Vincent (36°54'N et 11°49'W) dans un filet Bourée remonté de 5 100m en surface; il fut décrit l'année suivante par Zugmayer (2) qui en fit un genre nouveau et créa pour lui une famille, celle des *Anotopteridæ* (3). Le second fut pris à Madère en 1926, lors d'une pêche à la ligne de fond; remis au Musée de Monaco, il fut étudié par Roule (4) en 1927.

Les contenus d'estomacs de Germons m'ont fourni récemment quatre nouveaux exemplaires de cette espèce. Le premier fut apporté le 6 août 1931 par un thonnier de Concarneau revenant de pêcher à 180 milles environ dans le sud-ouest de Penmarc'h. Au début de juillet 1933, le deuxième tomba sur le pont de la gueule d'un Germon hissé à bout de ligne à quelques 80 milles au sud-ouest de Concarneau. Le même mois,

(1) Voir à ce sujet Chabanaud, *Mémoires de la Société des Sciences naturelles du Maroc*, 35, 1933, p. 97 et suiv.

(2) *Bull. Inst. océanogr.*, 193, 1911.

(3) E. Zugmayer, *Résul. camp. scient. du Prince Albert de Monaco*, xxxv, 1911.

(4) *Bull. Inst. océanogr.*, 497, 1927.

j'en reçus deux autres provenant de lieux de pêche situés, l'un entre 45°20′ et 46°40′ N, 7 et 9° W, l'autre à 250 milles environ W-S-W de Penmarc'h.

L'individu de Zugmayer mesurait 165^{mm}, celui de Roule 293^{mm}. Les quatre nouveaux n'ont que 137^{mm}, 151^{mm}, 153^{mm}, 158^{mm} de long; ils n'avaient donc pas terminé leur croissance.

Leur état de fraîcheur a permis de noter leur coloration : noirâtre sur le dos, bleu d'acier sur les flancs, argentée sur le ventre; l'iris est bleu, l'opercule bleu d'acier, la région voisine du dos piquetée de taches brunes, le museau est gris clair, les mâchoires bordées d'une bande noire, la mandibule marquée d'une autre traînée noire longitudinale.

Ces rencontres étendent largement vers le Nord, jusqu'au 47° de latitude, l'aire géographique de l'espèce. Elle apparaît ainsi en été comme un hôte de l'Atlantique oriental tempéré, au large du golfe de Gascogne, de la péninsule ibérique et du Maroc.

Le corps filiforme, l'énorme tête prolongée par une sorte de bec longuement endenté font de l'*Anotopterus* un Poisson étrange qu'on ne sait guère où placer. Ses formes, comme ses couleurs, rappellent celles d'espèces de haute mer, connues surtout depuis les expéditions océanographiques et que l'on considère volontiers comme vivant aux grandes profondeurs et adaptées à ce milieu spécial.

Mais le fait que le premier individu fut trouvé dans un filet remonté ouvert de 5100^{m} jusqu'en surface ne fournit aucune indication du niveau où il fut capturé. L'état de conservation des individus trouvés dans des estomacs de Germons indique qu'ils venaient d'être ingérés au moment où le Thunnidé mordit à l'hameçon, à fleur d'eau. Ces rencontres, jointes à toutes celles de Poissons à organes lumineux, tels que *Maurolicus Pennanti*, *Sternoptyx diaphana*, *Argyropelecus olfersi*, Myctophidés divers, recueillis dans les mêmes conditions ([1]), obligent à reviser les notions courantes sur les caractères de prétendue adaptation des Poissons à la vie abyssale. *A. pharao* apparaît comme un Poisson pélagique vivant au large, au-dessus de grandes profondeurs, mais tout près de la surface, au moins à certains moments.

Le petit nombre de ses captures pourrait provenir bien plus de la lenteur de déplacement des engins de pêche et de la vitesse de sa nage que de sa rareté réelle. A ce point de vue, le Germon est un auxiliaire particulièrement précieux des recherches zoologiques au grand large.

([1]) Legendre, *Arch. Zool. expérimentale et générale*, 74, 1932, p. 531-450.

OPTIQUE PHYSIOLOGIQUE. — *Sur les anomalies de la vision des couleurs.* Note de M. **Polack**, présentée par M. Ch. Fabry.

J'ai montré ([1]), que la théorie trichromatique ne s'accorde pas avec les faits et doit être abandonnée ainsi que la terminologie qui en dérive.

Pour ne rien préjuger de la nature des anomalies de la vision chromatique, je désigne les quatre types de ces anomalies par les noms des auteurs qui les ont décrits.

La trichromasie anomale devient ainsi le type Rayleigh, la cécité pour le vert, le type Nagel, la cécité pour le rouge, le type Dalton et l'achromatopsie totale, le type Daubeney-Huddart.

Dans la théorie trichromatique, l'anomalie du type Rayleigh ne trouve pas de définition précise. Certains auteurs la confondent même avec le Daltonisme dont elle diffère essentiellement et la décrivent sous la dénomination de daltonisme relatif.

Dans la nouvelle orientation d'idées qui fait l'objet de la Note précitée, cette confusion ne peut se produire. Le type Rayleigh y est nettement défini; il diffère de la vision normale par sa courbe de répartition de luminosité dans le spectre. Quant aux régions unitonales, régions où le ton ne varie pas, elles ne sont pas modifiées, leurs limites ne dépassent pas la longueur d'onde 640 ou tout au plus $635^{m\mu}$ en partant de l'extrémité rouge et 445 du côté du violet.

Le sens chromatique, c'est-à-dire la faculté de distinguer les couleurs par leur ton, est donc conservé; seul le rapport de leur luminosité, leur dosage physiologique est altéré.

Cependant, à la lecture des tables pseudo-iso-chromatiques ([2]) le type Rayleigh ne se comporte guère mieux que le daltonien du type Nagel.

([1]) *Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 1003.

([2]) On appelle de ce nom impropre des planches en couleurs destinées à l'examen de la vision chromatique et composées de petites taches diversement colorées, les unes formant un chiffre ou une figure quelconque, les autres remplissant le fond.

Certaines de ces planches sont déchiffrées quelle que soit la vision chromatique, d'autres ne peuvent l'être que si la vision chromatique est normale, les troisièmes, au contraire, sont déchiffrées seulement dans le cas d'anomalie de cette vision, les quatrièmes subordonnent la possibilité du déchiffrage au type de l'anomalie et dans les cinquièmes l'œil mormal voit un chiffre, tandis que l'œil, atteint d'anomalie, voit un autre tout à fait différent et invisible pour le normal.

Ce fait est intéressant à noter; il éclaire le mécanisme des tables en question, en montrant que celui-ci dépend plus du rapport de luminosité des couleurs que de leur iso-chromatisme apparent. La dénomination est donc mal choisie et prête à confusion : les tables pseudo-iso-chromatiques n'interrogent pas directement le sens chromatique proprement dit tel qu'il a été défini plus haut, mais plutôt le rapport de visibilité ou de luminosité des couleurs qui les composent.

Cette mise au point est nécessaire pour éviter les fausses interprétations auxquelles la nouvelle méthode d'examen a donné déjà lieu.

Dans la théorie trichromatique il est impossible d'établir une transition, d'indiquer les formes intermédiaires entre le système chromatique normal et le type Rayleigh, ni entre ce dernier et le daltonisme. Cette difficulté ne se présente pas dans la nouvelle conception qui consiste à caractériser la vision chromatique par deux facteurs : la position du maximum lumineux dans le spectre et l'étendue des régions unitonales.

A l'état normal ce maximum se trouve localisé dans le jaune verdâtre. Lorsqu'il se déplace, on observe l'anomalie du type Rayleigh d'autant plus accusée que le déplacement est plus considérable. Lorsqu'à ce déplacement s'ajoute l'extension des régions unitonales, on a les divers degrés de daltonisme.

En résumé, les théories classiques se sont montrées impuissantes à définir et à situer l'anomalie du type Rayleigh. La nouvelle manière de voir en donne au contraire une définition précise et forme avec la vision chromatique normale et ses diverses anomalies une série continue.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Précipitation des protéides par les sels neutres.* Note de MM. **G. Sandor**, **A. Bonnefoi** et **J. J. Pérez**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

La précipitation des protéides naturels par les sels neutres fut surtout étudiée par Fr. Hofmeister, qui compara cette précipitation à un processus de déshydratation et supposa que la solubilité des protéides naturels dans l'eau est due à l'existence de couches d'hydrates stabilisantes. Depuis, nos connaissances sur la physicochimie des solutions en général et sur celles des solutions protéidiques en particulier ont beaucoup évolué et les travaux de J. Loeb ont montré combien les solutions protéiques se rapprochent des solutions de cristalloïdes. La cause de la précipitation des protéides naturels par les sels neutres est encore inconnue et nous l'avons recherchée.

M. A. Machebœuf a démontré que les albumines du sérum sont précipitées quantitativement en milieu acide (pH 3,8) par une concentration en sulfate d'ammonium bien inférieure à la saturation. Ce fait nous a conduit à étudier la précipitation des protéides du sérum par le sulfate d'ammonium en fonction du pH.

1° *Séparation des globulines et des albumines.* — A un volume déterminé de sérum de cheval, nous avons ajouté un volume égal d'une solution saturée et neutre de sulfate d'ammonium et nous avons éliminé les globulines par centrifugation; celles-ci furent ensuite dissoutes dans un volume d'eau distillée égal aux 2/3 du volume du sérum et précipitées à nouveau par le même volume de solution saturée de sulfate d'ammonium. Les globulines ont enfin été dissoutes dans un volume d'eau distillée égal aux 2/3 du volume du sérum.

Nous avons, d'autre part, ajouté aux eaux mères de précipitation des globulines, contenant les albumines du sérum, 10 pour 100 de leur volume d'une solution saturée et neutre de sulfate d'ammonium.

Nous avons déterminé séparément par la méthode potentiométrique les variations du pH de ces solutions en fonction de volumes variables d'acide sulfurique N/5.

2° *Étude des globulines.* — A des volumes aliquotes de la solution des globulines, nous avons ajouté des volumes variables d'acide sulfurique N/5 contenant du sulfate d'ammonium au quart de saturation, et toutes les prises furent complétées au même volume par une solution de sulfate d'ammonium au quart de saturation. Les précipités formés furent séparés par centrifugation au bout de 10 minutes, puis leur azote protéidique dosé. A cet effet, nous avons dissous les précipités dans l'eau distillée et précipité par de l'acide trichloracétique 5 fois de suite pour éliminer le sulfate d'ammonium, puis nous avons dosé l'azote par la méthode de Kjeldahl. Ci-après nous réunissons les chiffres obtenus dans l'une de nos expériences; ils représentent les quantités d'azote protéidique précipitées en fonction du pH pour une concentration déterminée en protéides et en sulfate d'ammonium :

pH.	8,12.	7,38.	6,55.	6,04.	4,66.	4,35.	3,64.
N pour 100 en milligr.	5,4	4,25	3,35	3,35	4,7	6,33	19,7

3° *Étude des albumines.* — Les albumines furent traitées comme les globulines, mais avec une solution d'acide sulfurique N/5 dans l'eau distillée, et complétées au même volume avec de l'eau distillée. Nous avons obtenu les chiffres suivants :

pH.	7,08.	6,52.	6,04.	4,83.	4,54.	4,10.	2,88.
N pour 100 en milligr.....	2,1	3,93	1,42	6,21	12,74	16,21	19,53

Deux faits importants résultent de ces expériencсs :

a. La précipitation des protéides naturels par les sels neutres n'est pas due à une précipitabilité isoélectrique; la solubilité passe tout au contraire par un maximum au point isoélectrique (pH 6) pour les globulines et est encore excessivement élevée au point isoélectrique (pH 4,8) pour les albumines.

b. La courbe de solubilité montre un accident très net dans le cas des albumines. La solubilité commence par diminuer, puis elle augmente, pour diminuer de nouveau; elle passe ainsi par un premier maximum net à pH 6,6. Ce fait est constant pour le sérum de cheval.

La précipitabilité des protéides naturels par des sels neutres nous apparaît ainsi comparable à celle des ampholytes classiques. Le sulfate d'ammonium précipite les protéides parce que les sulfates de protéides sont des sels peu solubles, ils précipitent donc quand leur dissociation diminue par l'excès d'anions sulfates ou de cations d'hydrogène. Les protéides sont maintenus en solution par les mêmes forces que celles qui dispersent les cristalloïdes. La courbe de solubilité accidentée des albumines montre en outre que ces protéides ne sont pas des ampholytes simples, mais vraisemblablement des mélanges de plusieurs espèces chimiques.

La séance est levée à 16h.

A. Lx.

ERRATA.

(Séance du 6 novembre 1933.)

Note de M. *A. Rousset*, La diffusion de la lumière et les rotations des molécules dans les liquides :

Page 1034, ligne 4, *au lieu de* tranches, *lire* branches.

Page 1035, ligne 16, *au lieu de* $2A_{i_0}$, *lire* $2A/i_0$.